



Etude des effets thermiques dans des joints collés. Application à des structures renforcées par patches composites

Antoine Deheeger

► To cite this version:

Antoine Deheeger. Etude des effets thermiques dans des joints collés. Application à des structures renforcées par patches composites. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2009. Français. NNT : 2009CLF21954 . tel-00725274

HAL Id: tel-00725274

<https://theses.hal.science/tel-00725274>

Submitted on 24 Aug 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D.U. : 1954

EDSPIC : 445

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL - CLERMONT II

École Doctorale

Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

T H È S E

présentée par

Antoine DEHEEGER

Ingénieur de l'Ecole Centrale de Lille

pour obtenir le grade de

Docteur d'Université

Spécialité : Mécanique du solide

Etude des effets thermiques dans des joints collés

Application à des structures renforcées par

patches composites

Soutenue publiquement le **30 Septembre 2009** devant le jury :

S.	AIVAZZADEH	ISAT, Nevers	Rapporteur
J.J.	BARRAU	Université Paul Sabatier, Toulouse	Président du jury
J.Y.	COGNARD	ENSIETA, Brest	Rapporteur
M.	GRÉDIAC	Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand	Co-encadrant
P.	MADELPECH	CEAT (DGA), Toulouse	Invité
J.D.	MATHIAS	CEMAGREF, Clermont-Ferrand	Co-encadrant
V.	VERNEY	Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI)

Université Blaise Pascal et Institut Français de Mécanique Avancée

Remerciements

Pour commencer, je tiens à remercier particulièrement mes deux co-encadrants, Michel Grédiac et Jean-Denis Mathias, pour leur implication et leur soutien durant ces trois années de thèse, autant à titre professionnel que personnel.

Je remercie également l'ensemble des personnes qui ont pris part d'une manière ou d'une autre à ces travaux et qui m'ont permis d'avancer : professeurs, chercheurs, techniciens, ingénieurs, étudiants, doctorants, de France ou d'ailleurs, merci à tous.

Je remercie aussi l'ensemble des collègues du laboratoire ainsi que les voisins successifs ou occasionnels, plus ou moins proches, du bureau du fond du couloir pour les moments passés ensemble.

Merci enfin à ma famille, parents, frères et soeur, et à mes amis qui m'ont soutenu en dehors du laboratoire.

Bonne lecture.

Résumé

Contexte Des patches en matériaux composites sont utilisés dans l'aéronautique pour réparer ou renforcer des structures métalliques. Ces deux types de matériaux présentent cependant des coefficients de dilatation très différents. De ce fait, leur assemblage, soumis à de grandes variations de température en cours de fonctionnement, est le siège de pics de contraintes pouvant provoquer la rupture du joint collé ou le décollement du patch. Il est donc nécessaire de connaître en détail la distribution des contraintes dans l'assemblage pour prévenir toute défaillance. Ceci passe d'abord par une étude des phénomènes présents au sein de l'assemblage à travers différents modèles de calcul. De plus, les variations de température provoquant des modifications des propriétés des matériaux assemblés et en particulier de la colle, une caractérisation précise de son comportement est nécessaire.

Calcul analytique bidimensionnel Dans un premier temps, divers modèles unidimensionnels ont été développés dans le cadre de l'élasticité linéaire afin d'évaluer les contraintes d'origine thermique dans l'assemblage collé. Des modifications ont ensuite été apportées à un modèle bidimensionnel précédemment développé pour un assemblage de forme rectangulaire soumis à des chargements mécaniques afin de tenir également compte du chargement thermique.

Le modèle ainsi obtenu, validé par éléments finis, a été utilisé pour comparer l'efficacité et la résistance de différents patches composés de fibres de carbone, de bore ou encore de GLARE. Un effet bidimensionnel lié à la différence des coefficients de Poisson entre les matériaux a été mis en évidence pour un chargement thermique, soulignant ainsi l'intérêt d'un modèle bidimensionnel par rapport à un modèle unidimensionnel.

Calcul thermo-viscoélastique Dans les modèles précédents, tous les matériaux sont modélisés dans les calculs par une loi de type élastique linéaire. Cependant, le comportement de la colle utilisée varie en fonction de la température et du temps. Cette colle a donc été testée expérimentalement, son comportement modélisé par une loi de type thermo-viscoélastique, et celui-ci intégré dans des modèles de calcul adaptés.

Le modèle analytique développé est une extension des modèles classiques, où les propriétés de la colle peuvent évoluer en fonction du temps et de la température, tous les autres paramètres étant supposés constants. Le chargement imposé dans les exemples présentés est purement thermique, mais peut également être d'origine mécanique.

Ce modèle testé dans différentes configurations a permis de distinguer deux effets : celui de la température et celui de l'historique de chargement. Ces effets peuvent agir ensemble dans des proportions et/ou des sens différents. Il est donc essentiel d'en tenir compte dès la phase de conception des joints collés. Cette méthode permet également de retrouver les résultats classiques lorsque la loi de comportement de la colle est restreinte à sa partie élastique.

Essais sur éprouvettes patchées Des essais ont été mis en place sur des éprouvettes patchées afin de valider ces différents modèles. Des essais avec des chargements purement thermiques où l'éprouvette est chauffée à l'aide de résistances chauffantes ont d'abord été conduits. Les champs de température et de déplacement ont été mesurés. Les déplacements ont été obtenus en utilisant la méthode de la grille : les images successives d'une grille collée sur le patch et un traitement approprié ont permis de remonter aux déplacements puis aux déformations au sein du patch. Ces essais ont permis de mettre en évidence des phénomènes liés à l'évolution de la température.

Des essais thermo-mécaniques ont également été mis en place. Un chargement mécanique a été appliqué à l'éprouvette patchée, ceci pour différentes températures allant de 20 °C à 70 °C. Les premiers résultats ont mis en évidence de manière qualitative les effets viscoélastiques prévus par les calculs.

Abstract

Context Composite patches are often used to repair or to reinforce metallic aircraft structures. Those two materials however exhibit very different Coefficients of Thermal Expansions (CTE). Shear stress peaks may then appear in a bonded joint submitted to wide temperature variations during its service life. Those stress peaks may lead to the debonding or to the failure of the joint. It is then necessary to precisely evaluate the stress distribution in the bonded joints to avoid any failure. Phenomena occurring in the structure have been studied using different models. In addition, temperature variations cause modifications in the assembled material properties, especially in the adhesive. Hence, a precise characterization of the mechanical behaviour of the adhesive used in patch bonding has been performed.

Analytical bidirectional model Several unidirectional models have been used within the framework of linear elasticity in order to evaluate thermal stresses in a bonded joint. A bidirectional analytical model of a rectangular bonded joint previously developed for mechanical loadings has been improved to account for thermal loadings.

The obtained analytical model, validated with a Finite Element calculation, has been used to compare the efficiency and strength of different patches made of carbon fibres, bore fibres or GLARE. A bidirectional effect due to the difference between the Poisson's ratios of the assembled materials has been clearly highlighted for thermal loadings, thus proving the relevance of a bidirectional model compared with a unidirectional one.

Thermo-viscoelastic calculation In the previous models, all materials were supposed to exhibit a linear elastic response. The adhesive's shear modulus is however known to decrease with time and temperature. The adhesive has therefore been tested to characterize its thermo-viscoelastic behaviour. The resulting model has then

been introduced in a specific calculation model. This model has been used in various configurations. Two main effects have been characterized with the obtained results: the first one is related to temperature and the other one to loading history. These effects may have different consequences and it is necessary to take both of them into account for a correct bonded joint design. This calculation method is in fact an extension of some classical linear elastic models. It gives therefore the same results if the thermo-viscoelastic behaviour law is limited to its linear elastic component.

Experimental testing of reinforced specimens Experimental tests have been carried out on patched specimens in order to confirm the models developed in the first part of the work. Thermal loadings were applied to the specimens through thermal resistances while both thermal and displacement fields were measured. The displacements were obtained using the grid method: successive images of a grid bonded on the upper surface of the patch were analyzed with a specific procedure which enabled us to calculate the displacements and strains in the patch. These tests led to the experimental evidence of the phenomena predicted by the model.

Thermo-mechanical tests have finally been carried out. A mechanical loading has been applied to the specimen at different temperatures between 20 °C and 70 °C. The expected viscoelastic effects have been observed from a qualitative point of view.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	iii
Abstract	v
I Introduction	1
I.1 Contexte de l'étude	3
I.2 Contexte industriel	4
I.2.1 Quelques exemples d'application	4
I.2.2 Choix de la méthode d'assemblage	5
I.2.3 Choix des matériaux utilisés	8
I.3 Généralités sur le comportement de la colle	9
I.3.1 Les polymères	9
I.3.2 Les colles époxydes	9
I.3.3 La Redux 312	11
I.3.4 Caractérisation et modélisation du comportement des colles époxydes	12
I.4 Modélisation du comportement d'un assemblage collé	13
I.4.1 Historique des approches analytiques	13
I.4.2 Modèle unidimensionnel thermo-mécanique	17
I.4.3 Modèle bidimensionnel mécanique	21
I.4.4 Modélisation de la viscoélasticité linéaire	23
I.5 Conclusion	26
II Modèle analytique bidimensionnel d'un renfort soumis à un char- gement thermique	29

II.1	Introduction	31
II.2	Présentation du problème	33
II.2.1	Géométrie et notations	33
II.2.2	Hypothèses	33
II.3	Résolution analytique du problème 2D	35
II.3.1	Equations d'équilibre	35
II.3.2	Résolution par séries de Fourier	38
II.3.3	Remarques	40
II.4	Exemples d'applications	41
II.4.1	Introduction	41
II.4.2	Cas d'un renfort isotrope	43
II.4.3	Cas d'un patch unidirectionnel carbone/époxyde	46
II.4.4	Cas d'un patch croisé $[0/90]_s$ carbone/époxyde	50
II.4.5	Cas d'un patch unidirectionnel bore/époxyde	52
II.4.6	Cas d'un patch en GLARE	54
II.5	Comparaison des résultats	56
II.5.1	Critère de rupture du patch : critère de Tsai-Wu	56
II.5.2	Critère de rupture de la colle et de l'aluminium : critère de Von Mises	60
II.5.3	Bilan comparatif	61
II.6	Conclusion	64
III	Caractérisation du comportement de la colle Redux 312	67
III.1	Introduction	69
III.2	Essais de caractérisation	69
III.2.1	Introduction	69
III.2.2	Fabrication des éprouvettes massives de colle	70
III.2.3	Essai de DSC	72
III.2.4	Essai dynamique	73
III.2.5	Essais de relaxation	76
III.3	Identification des paramètres viscoélastiques	80
III.3.1	Objectif	80
III.3.2	Présentation des méthodes existantes	81
III.3.3	Méthode retenue	92
III.4	Conclusion	95

IV	Modèle de comportement thermo-viscoélastique d'un joint collé	99
IV.1	Introduction	101
IV.2	Développement d'un modèle thermo-viscoélastique	102
IV.2.1	Géométrie et notations	102
IV.2.2	Equations d'équilibre	103
IV.2.3	Lois de comportement	103
IV.2.4	Ecriture du cisaillement dans la colle	104
IV.2.5	Dérivation de l'équation d'équilibre dans le patch composite	105
IV.2.6	Calcul de $\kappa_\mu(x, t_j)$	106
IV.2.7	Calcul des intégrales $I_1^\mu(t_{j-1}, t_j)$ et $I_2^\mu(t_{j-1}, t_j)$	107
IV.2.8	Réécriture de l'équation différentielle régissant $\sigma_{xx}^c(x, t_j)$	109
IV.2.9	Résolution par itérations de $\sigma_{xx}^c(x, t_j)$	110
IV.3	Remarques sur le calcul	111
IV.3.1	Comparaison avec un calcul élastique	111
IV.3.2	Convergence temporelle	112
IV.3.3	Convergence spatiale	113
IV.4	Application de la solution	115
IV.4.1	Description du chargement appliqué	115
IV.4.2	Cas élastique : G_0 constant	116
IV.4.3	Cas thermoélastique : G_0 variable	118
IV.4.4	Cas viscoélastique : G_i constants	120
IV.4.5	Cas thermo-viscoélastique : G_i variables	122
IV.4.6	Comparaison des différents modèles de calcul	124
IV.5	Conclusion	126
V	Étude expérimentale	129
V.1	Introduction	131
V.2	Présentation de la méthode de la grille	132
V.2.1	Introduction	132
V.2.2	Principe	134
V.2.3	Traitement des résultats	135
V.3	Dispositif expérimental	136
V.3.1	Éprouvettes utilisées	136
V.3.2	Application des chargements thermiques et mécaniques	139
V.3.3	Mesures effectuées	139

V.4	Essais thermiques	140
V.4.1	Présentation de l'essai	140
V.4.2	Résultats obtenus pour le patch unidirectionnel	141
V.4.3	Résultats obtenus pour le patch croisé $[0/90]_s$	149
V.5	Essais thermo-mécaniques	154
V.5.1	Présentation de l'essai	154
V.5.2	Evolution du pic de cisaillement dans la colle	155
V.6	Conclusion	158
Conclusions et perspectives		159
Bibliographie		171
Table des figures		178
Liste des tableaux		179
Annexes		181
A.1	Résolution numérique d'une équation différentielle de second ordre .	183
A.2	Résolution du système d'équations différentielles II.11	185
A.2.1	Système d'équations différentielles couplées à résoudre	185
A.2.2	Recherche de σ_{xx}^c le long des frontières Γ_2 et Γ_4	186
A.2.3	Solution pour σ_{xx}^c sous forme de séries	186
A.2.4	Solution le long des frontières	188
A.2.5	Détermination de Φ_m	189

Chapitre I

Introduction

Ce chapitre présente le contexte de cette thèse illustré par quelques exemples trouvés dans la littérature ainsi que les questions à l'origine des recherches effectuées. Un bref état de l'art sur la modélisation des joints collés est ensuite présenté à travers plusieurs modèles de calcul servant de point de départ aux travaux menés.

Sommaire

I.1	Contexte de l'étude	3
I.2	Contexte industriel	4
I.2.1	Quelques exemples d'application	4
I.2.2	Choix de la méthode d'assemblage	5
I.2.3	Choix des matériaux utilisés	8
I.3	Généralités sur le comportement de la colle	9
I.3.1	Les polymères	9
I.3.2	Les colles époxydes	9
I.3.3	La Redux 312	11
I.3.4	Caractérisation et modélisation du comportement des colles époxydes	12
I.4	Modélisation du comportement d'un assemblage collé . .	13
I.4.1	Historique des approches analytiques	13
I.4.2	Modèle unidimensionnel thermo-mécanique	17
I.4.3	Modèle bidimensionnel mécanique	21
I.4.4	Modélisation de la viscoélasticité linéaire	23
I.5	Conclusion	26

I.1 Contexte de l'étude

LES TRAVAUX présentés ici sont la suite logique d'une étude menée depuis plusieurs années en France par la Délégation Générale pour l'Armement. Cette étude, menée en collaboration avec le Centre d'Essais Aéronautiques de Toulouse (CEAT) et les Ateliers Industriels de l'Aéronautique (AIA) de Clermont-Ferrand, s'inscrit dans le cadre de la maintenance de structures aéronautiques, le but étant de renforcer préventivement des structures endommagées à l'aide de patchs composites collés. Ce type de renfort a déjà été utilisé avec succès depuis quelques décennies, notamment en Australie par la Royal Australian Air Force (RAAF) qui a été pionnière en la matière. En effet, sa flotte est composée en grande partie d'avions achetés à d'autres pays, ce qui a favorisé une recherche intensive sur la maintenance de ces structures vieillissantes. Quelques exemples de renforcements de structures aéronautiques sont présentés dans les paragraphes suivants.

Le renforcement des structures par patch composite peut s'avérer très bénéfique et plusieurs études sur le sujet ont donc été menées en France ces dernières années afin de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu. En effet, certains appareils, dont l'Alphajet, présentent des signes de vieillissement. L'un des problèmes récurrents est notamment l'apparition de criques de fatigue au niveau de l'encastrement de la voilure qui, lorsqu'elles sont de dimensions significatives, provoquent la mise hors-service de cette voilure.

Afin de prolonger la durée de vie de ces structures, plusieurs solutions existent :

- si la taille des criques n'est pas trop importante, une des solutions utilisées en maintenance est l'alésage de la pointe de fissure, qui peut arrêter sa propagation ;
- si le niveau de dommage est trop important, les voilures sont tout simplement remplacées, ce qui s'avère très coûteux. En effet, la fabrication d'une voilure complète représente un coût d'environ 1,5 million d'euros ;
- si des fissures apparaissent dans des zones non-critiques, elles peuvent être pontées par des matériaux composites, on parle alors de *réparation* ;
- si les fissures ne sont pas encore apparues, une solution actuellement à l'état

d'étude consisterait à coller un patch composite préventivement sur la zone la plus fragile, on parle alors de *renforcement*. C'est ce dernier point qui fait l'objet des recherches présentées dans cette thèse.

L'une des problématiques soulevées par l'assemblage d'un matériau composite sur une structure métallique, généralement en aluminium, est liée à la différence du comportement de ces deux matériaux face à une variation de température. En effet, les composites généralement utilisés en France sont à base de fibres de carbone. Or ce type de patch ne se dilate quasiment pas suivant la direction des fibres en comparaison avec l'aluminium qui présente un coefficient de dilatation thermique beaucoup plus important. Des contraintes d'origine thermique apparaissent donc au sein des éléments assemblés lorsque la structure collée est soumise à des changements de température. Les structures étudiées ici sont soumises à des températures pouvant aller de $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$ en vol à $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ au sol. La colle, qui assure le lien en transmettant les efforts entre les matériaux, est le principal point faible de ces assemblages collés car elle est soumise à de fortes contraintes de cisaillement. Ces contraintes peuvent mener au décollement ou à la rupture du patch composite si celui-ci est mal dimensionné. C'est l'étude de ces contraintes d'origine thermique qui est au centre des travaux présentés ici.

Les principales préoccupations au cours de ces travaux tournent donc autour du comportement d'un joint collé lorsqu'il est soumis à une variation de température : comment évoluent les contraintes dans les éléments assemblés ? Comment évaluer au mieux les contraintes dans la colle lors d'une variation de température, sachant que cette variation thermique induit également un changement des propriétés mécaniques des matériaux et de la colle en particulier ?

Pour répondre à ces questions, une étude bibliographique a été menée sur les modèles analytiques existants. Ceux qui ont servi de point de départ aux travaux présentés dans cette thèse sont développés dans les paragraphes suivants.

1.2 Contexte industriel

1.2.1 Quelques exemples d'application

Dès les années 70, la Royal Australian Air Force a entrepris de développer l'utilisation des patchs composites pour la maintenance de certains avions vieillissants. L'Aeronautical and Marine Research Laboratory (AMRL) a utilisé avec succès des renforts en fibres de bore afin de parer des problèmes de corrosion et de fatigue. Le

tableau I.1 résume les principaux travaux effectués [Avr01, BJ88].

Avion	Type de dommage	Commentaires
Hercules	Corrosion	Plus de 400 réparations depuis 1975
Macchi	Fatigue	Durée de vie au moins doublée
Mirage	Fatigue	Plus de 180 réparations depuis 1979
Nomad	Corrosion	Plus de 105 000 heures de vols simulés
F 111	Corrosion	En service depuis 1980

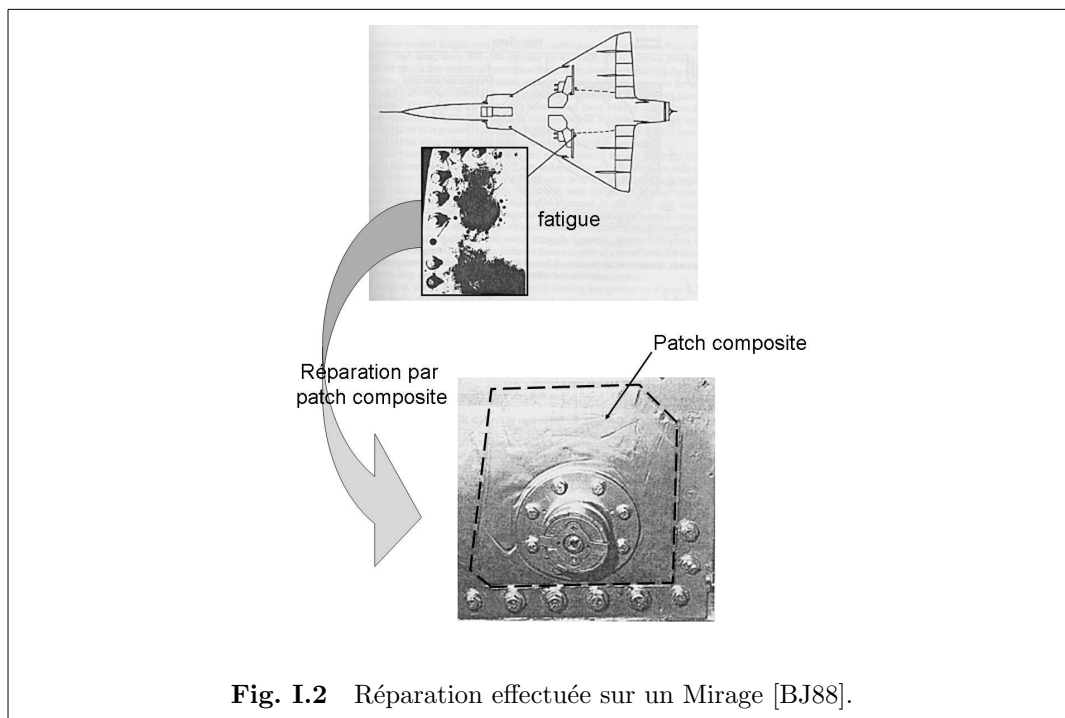
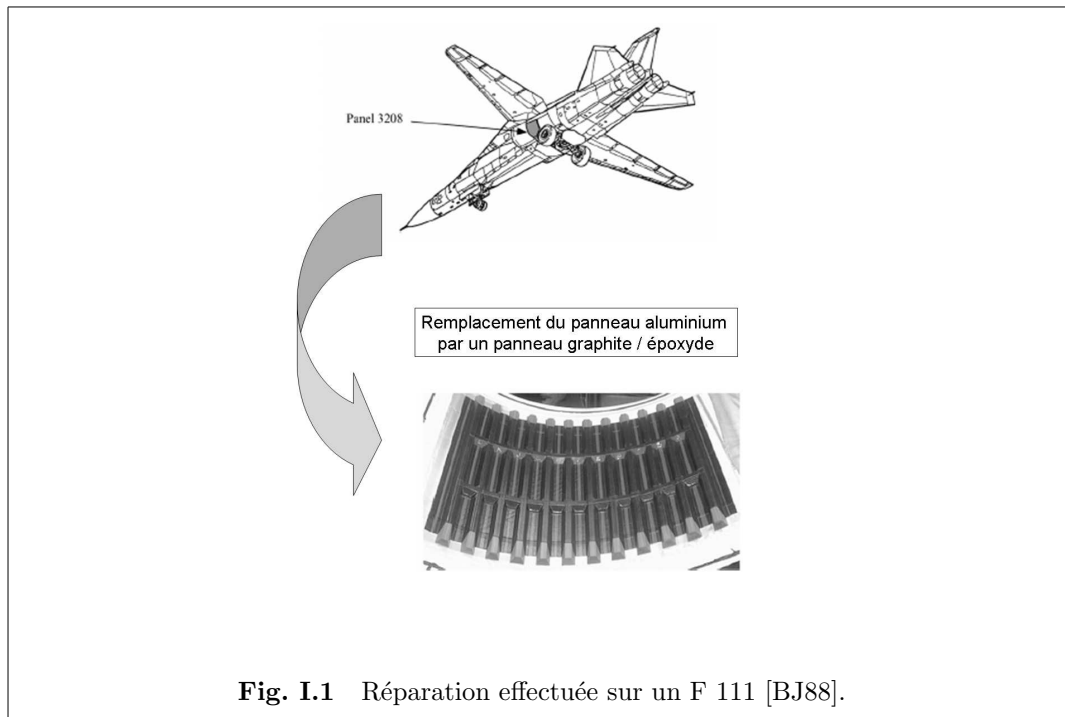
Tab. I.1 Exemples de réparations par patchs composites effectuées par la RAAF d'après [Avr01, BJ88].

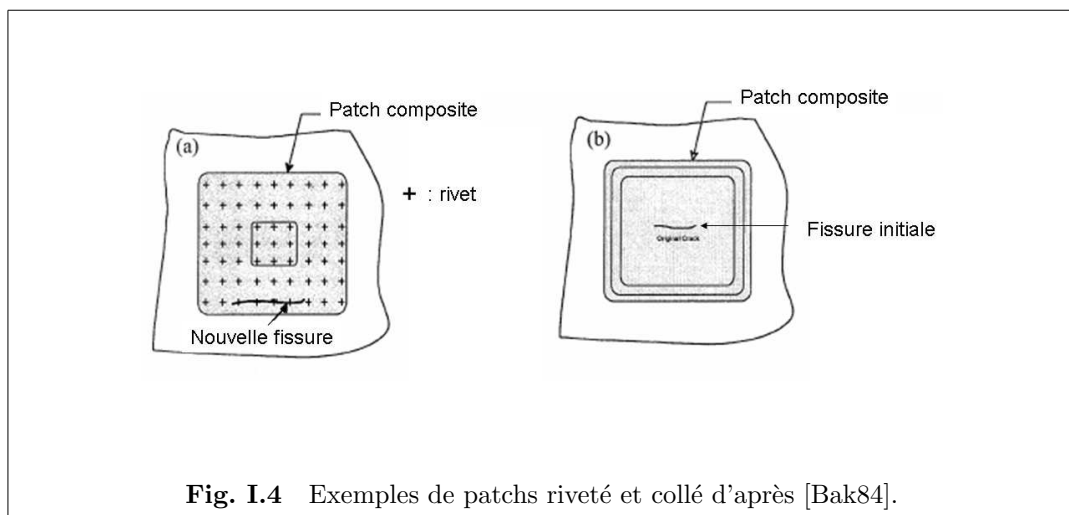
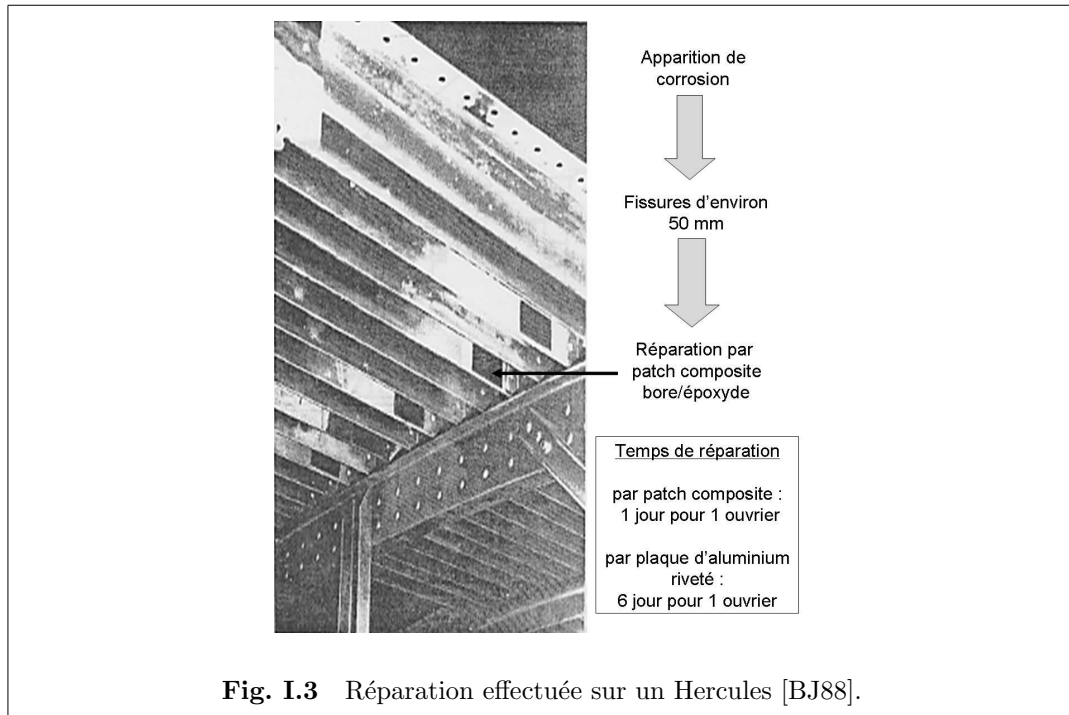
L'utilisation des patchs composites est alors devenue une opération classique en Australie pour réparer des zones endommagées. Les figures I.1, I.2 et I.3 présentent quelques exemples. Sur la figure I.1, l'avion représenté est un F 111. La particularité de cette réparation est que le panneau endommagé a été entièrement substitué par une pièce en composite carbone/époxyde. Dans l'exemple suivant, des fissures dues à la fatigue de la structure sont apparues près d'un accès au réservoir. La figure I.2 présente la zone endommagée et le patch utilisé. Des essais de fatigue ont montré une nette diminution de la vitesse de propagation des fissures après réparation [BJ88]. Cette solution, validée par la RAAF, a permis la réparation de plus de 180 avions Mirage. Le dernier exemple, présenté sur la figure I.3, est un avion Hercules dont l'intérieur de l'aile présente une importante corrosion. La procédure classique de réparation dans ce cas consistait jusqu'alors à riveter des plaques d'aluminium sur la partie endommagée et nécessitait six jours de travail pour un ouvrier. L'utilisation de patchs composites a réduit à une journée le temps de travail nécessaire pour la réparation.

I.2.2 Choix de la méthode d'assemblage

La littérature fait le point sur les avantages et inconvénients du collage par rapport à d'autres méthodes d'assemblage comme le rivetage ou la soudure [Jea93]. La figure I.4 présente deux types de patchs, l'un riveté, l'autre collé. Quelques avantages du collage sont listés ci-dessous :

- le collage est une méthode universelle permettant d'assembler des matériaux aux propriétés très différentes ;





- le collage permet d’assembler des éléments sans les affaiblir. Il n’est pas nécessaire de percer les composants contrairement au rivetage ;
- contrairement au rivetage, le collage permet de distribuer les contraintes sur une large zone, minimisant ainsi les concentrations de contraintes ;
- l’assemblage permet une continuité de la liaison [Sav07], rigidifiant ainsi la structure et augmentant sa durée de vie en fatigue [Bak99] ;
- les bruits et vibrations sont amortis ;
- le collage permet de s’assurer de l’étanchéité de la liaison ;
- l’utilisation du collage permet un gain de poids ...

Quelques limitations de la méthode de collage existent toutefois :

- à l’exception de quelques céramiques, les colles ont des domaines d’utilisation compris entre $-110\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $+250\text{ }^{\circ}\text{C}$;
- le collage nécessite une préparation de surface méticuleuse pour obtenir de bons résultats ;
- la durabilité des colles face aux agents chimiques est encore mal maîtrisée ;
- le démontage ou le recyclage de composants collés peut s’avérer difficile ;
- certains traitements de surface nécessitent l’utilisation de produits allergisants ...

I.2.3 Choix des matériaux utilisés

Les deux types de renforts généralement utilisés dans l’aéronautique sont des composites de type carbone/époxyde [GMR01] ou bore/époxyde [BA]. La RAAF a utilisé ce dernier type de renfort dans les années 80 [BJ88], mais son utilisation est actuellement interdite en France car les fibres de bore seraient cancérogènes. La DGA a pour le moment opté pour un renfort de type carbone/époxyde, ce matériau sera donc utilisé dans la suite de l’étude pour les applications numériques et pour l’étude expérimentale. Le principal inconvénient de ce matériau provient de son coefficient de dilatation très faible suivant la direction des fibres, de l’ordre de $0.02\text{ }10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, ce qui peut provoquer des contraintes d’origine thermique assez importantes. C’est l’étude de ce phénomène qui est le point de départ de cette thèse. Dans une optique de comparaison des performances, d’autres matériaux seront étudiés pour les applications numériques, en particulier les fibres de bore et le GLARE. Ce dernier est un matériau composite composé de fines couches d’aluminium et de fibres de verre qui a l’avantage d’avoir sensiblement le même coefficient de dilatation que l’aluminium. Il a cependant aussi une rigidité très inférieure aux deux autres types de composites

[WY05].

I.3 Généralités sur le comportement de la colle

I.3.1 Les polymères

Les polymères sont de longs enchaînements de molécules liées entre elles, les monomères. Il y a trois grandes classes de polymères : les thermoplastiques, les thermodurcissables et les élastomères. Le tableau I.2 synthétise les principales propriétés de ces polymères. A température ambiante, les thermodurcissables et les thermoplastiques ont un comportement vitreux. Sous l'effet d'une élévation de température, ils deviennent caoutchoutiques. La phase de transition entre ces deux états est caractérisée par la température de transition vitreuse, notée T_g , illustrée sur la figure I.5. Cette température est de l'ordre de grandeur de la température de polymérisation [Cog00].

Classes de polymère	Souplesse	Résistance mécanique	Résistance thermique	Résistance aux agents chimiques
Thermodurcissables	Mauvaise	Bonne	Bonne	Bonne
Thermoplastiques	Moyenne	Médiocre	Médiocre	Bonne
Elastomères	Très bonne	Mauvaise	Variable	Médiocre

Tab. I.2 Propriétés des polymères [MBA78].

I.3.2 Les colles époxydes

Les colles structurales sont caractérisées par leurs propriétés mécaniques, par leur résistance aussi bien aux hautes températures qu'aux basses températures, ainsi qu'aux agents chimiques. Elles sont souvent à base de résines thermodurcissables [MBA78] et se caractérisent par un haut module et une haute résistance, pouvant ainsi transmettre des efforts sans affecter leur intégrité physique. En particulier, les colles époxydes sont devenues un élément essentiel pour l'assemblage de structures, en partie grâce à leur haut rapport résistance/poids mais aussi pour leurs excellentes propriétés adhésives et leur stabilité lors des variations de température [Kin87].

Les colles époxydes sont commercialisées sous deux formes principales [MBA78] :

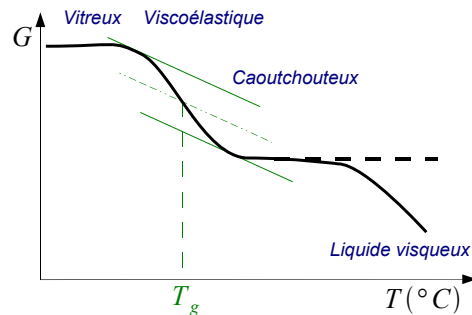


Fig. I.5 Les différents états d'un polymère caractérisés par leur module de cisaillement en fonction de la température. Les polymères réticulés ne deviennent pas liquides et restent caoutchouteux jusqu'à décomposition (droite en pointillés) [Cog00]. Le niveau du plateau caoutchoutique baisse avec l'augmentation du caractère amorphe du polymère.

- colles à un composant (durcisseur et base dans le même composant). Elles polymérisent à chaud à partir de 120 °C ;
- colles bi-composants (durcisseur et base livrés séparément). Elles peuvent polymériser à froid à partir de 5 °C.

Les colles époxydes à un composant offrent une meilleure résistance mécanique et une meilleure résistance à la fatigue. La résistance mécanique n'est généralement pas affectée par des températures inférieures à 80 °C. Il existe cependant des colles époxydes permettant des températures en service de 150 °C. Les propriétés de ces colles peuvent être modifiées par adjonction d'autres résines ou de caoutchouc : nylon, polyamide, polysulfure, silicone, etc. Les propriétés mécaniques des colles époxydes sont résumées dans le tableau I.3.

La résistance au cisaillement de la colle est un paramètre important pour la transmission d'efforts dans un joint collé. Il faut cependant distinguer la résistance de la colle et celle du joint collé. En effet, au niveau de la zone de transition entre la colle et chacun des substrats se créent des interactions et des liaisons chimiques. Cette zone, appelée interphase, a une composition différente de celle de la colle ou du substrat [SASS00] et conditionne le comportement du joint collé, en particulier sa résistance [Cog00].

Propriété	Min-Max	Moyenne	Echantillons
Module d'Young	1.00 – 6.55 GPa	4.75 GPa	23
Résistance au cisaillement	2.24 – 41.4 MPa	16.7 MPa	121
Résistance à la traction	13.8 – 69.6 MPa	36.0 MPa	61
Résistance à la compression	16.0 – 159 MPa	79.3 MPa	38
Résistance au pelage	0.175 – 12.3 kNm ⁻¹	4.11 kNm ⁻¹	12
Déformation à rupture	1.20 – 20%	3.93%	43
Dilatation thermique	4.50 – 150 10 ⁻⁶ °C ⁻¹	51.8 10 ⁻⁶ °C ⁻¹	77

Tab. I.3 Propriétés mécaniques des colles époxydes [Cou09]. La dernière colonne précise le nombre d'échantillons utilisés pour déterminer les valeurs minimales, maximales et moyennes.

I.3.3 La Redux 312

La Redux 312 est une colle thermodurcissable utilisée pour assembler des métaux et des matériaux composites. Elle présente de bonnes propriétés mécaniques jusqu'à 100 °C [Com07]. La procédure de mise en oeuvre est montrée sur la figure I.6. L'assemblage est chauffé à 120 °C pendant une heure sous une pression de 0.3 MPa. Les vitesses d'augmentation et de diminution de la température sont contrôlées et fixées entre 2 °C/min et 4 °C/min.

Le tableau I.4 présente les propriétés de la Redux 312 L obtenues auprès du fournisseur Hexcel. Peu d'informations sont disponibles sur l'évolution de sa rigidité en fonction du temps ou de la température.

Propriété	Température du test	Valeur
Résistance au cisaillement	22 °C	42 MPa
	70 °C	38 MPa
	80 °C	35 MPa
	100 °C	17 MPa
Résistance à la traction	22 °C	7.0 MPa

Tab. I.4 Propriétés mécaniques de la Redux 312 [Com07].

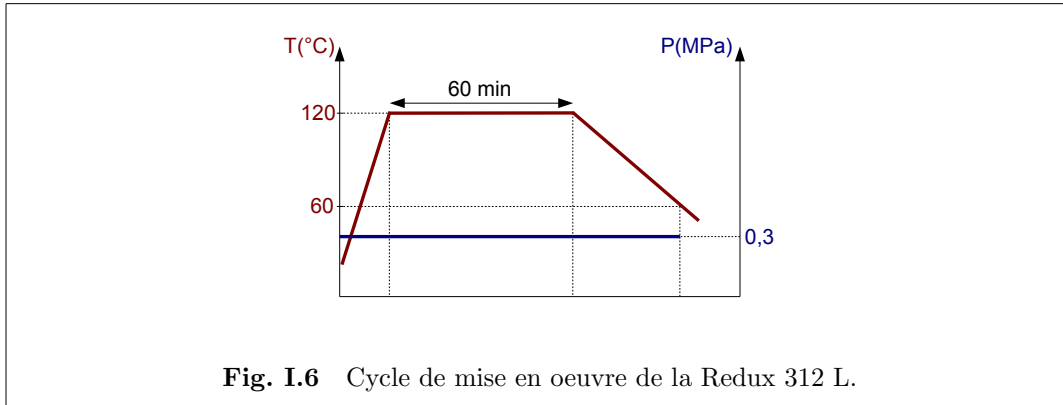


Fig. I.6 Cycle de mise en oeuvre de la Redux 312 L.

I.3.4 Caractérisation et modélisation du comportement des colles époxydes

Des études ont mis en évidence le comportement viscoélastique d'une colle époxyde, la FM 73 [PW82, CJ95]. Ce comportement viscoélastique dépend en outre de la température à laquelle la sollicitation est appliquée [PW83]. En effet la rigidité de la colle chute lorsque la température augmente. De nombreux modèles rhéologiques permettent alors de modéliser quantitativement le comportement viscoélastique linéaire observé. Ils sont obtenus en combinant des éléments ressorts et amortisseurs de différentes manières. Quelques modèles courants sont présentés dans le tableau I.5. Une description quantitative des phénomènes viscoélastiques observés sur des matériaux polymères obéissant au principe de superposition de Boltzmann [Skr86, WR00] peut donc être obtenue en combinant judicieusement ces éléments, par exemple en considérant un nombre approprié de branches en parallèle pour le modèle de Maxwell généralisé ou d'éléments en série pour le modèle de Kelvin généralisé.

Cependant, des travaux sur le comportement de colles époxydes révèlent une non-linéarité des paramètres rhéologiques mesurés en fonction du niveau de chargement appliqué [Cro95, YCR01]. Le principe de superposition de Boltzmann ne s'applique alors plus au delà d'un certain niveau de chargement. Cette effet est particulièrement visible lorsque le matériau est soumis à des chargements cycliques [CJ95, DM04].

Une recherche bibliographique sur le sujet révèle qu'il existe un réel manque de méthodes de calcul fiables reconnues et acceptées permettant de mener des analyses intégrant l'influence du temps, mais aussi de la température, du niveau de chargement, de l'humidité, du vieillissement... sur les déformations de ces matériaux. La diversité des colles disponibles sur le marché et leurs conditions d'utilisation spéci-

fiques expliquent pourquoi une telle méthode n'a pas encore été formulée [MS09]. Des modèles partiels existent toutefois pour des conditions spécifiques d'utilisation et sous certaines hypothèses. En particulier, le comportement thermo-viscoélastique de la colle Redux 312 est très peu documenté.

I.4 Modélisation du comportement d'un assemblage collé

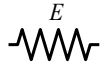
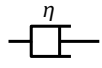
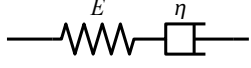
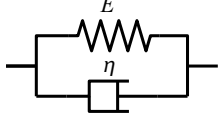
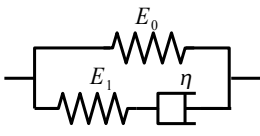
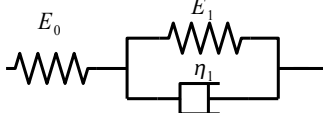
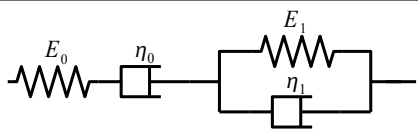
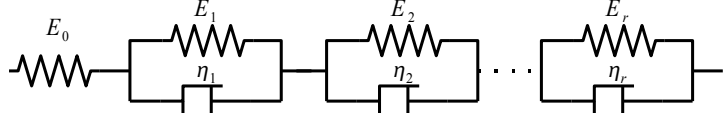
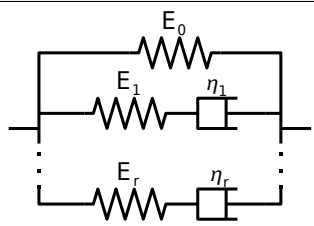
I.4.1 Historique des approches analytiques

De nombreuses études sont dédiées à l'analyse du comportement d'assemblages collés soumis à diverses sollicitations et pour différentes configurations. Des hypothèses sont émises dans chaque cas afin de faciliter la résolution du problème. Une étude bibliographique comparative assez complète sur les modèles analytiques de joints collés est proposée par [DSDNAS09, DSDNA⁺09]. Quelques modèles de joints collés classiquement étudiés sont présentés sur la figure I.7. L'approche la plus simple pour le calcul des contraintes dans la colle consiste à considérer qu'elle ne travaille qu'en cisaillement et que celui-ci est constant dans toute la zone de recouvrement. Cependant, les premiers travaux un peu plus élaborés sont généralement attribués à Volkersen [Vol38], qui a proposé un modèle de joint collé à simple recouvrement dans le cadre des hypothèses suivantes :

- les matériaux ont tous un comportement élastique linéaire ;
- les adhérents travaillent en traction/compression ;
- la colle travaille en cisaillement ;
- les contraintes sont supposées constantes suivant l'épaisseur des matériaux ;
- la flexion de l'assemblage est négligée.

Ce modèle est présenté plus en détail au paragraphe I.4.2. De Bruyne [dB44] a ensuite adapté ce modèle pour les joints à double recouvrement. Goland et Reissner [GR44] ont étudié l'influence de la flexion du joint collé sur la distribution des contraintes. En 1973, Hart-Smith [HS73a, HS73b] a intégré la plasticité de la colle et la dilatation thermique des adhérents pour les joints à simple et double recouvrement.

La première étude partielle sur l'effet bidimensionnel dû au coefficient de Poisson date de 1973 [AP73]. Elle a depuis été étendue au calcul complet des champs de contraintes dans un assemblage collé de forme rectangulaire soumis à des chargements mécaniques. La plupart des modèles analytiques existant jusqu'alors étaient unidimensionnels. Le passage à un assemblage rectangulaire a permis d'analyser finement des effets 2D liés au couplage des contraintes entre les deux directions de

Dénomination	Schématisation
Hooke	
Newton	
Maxwell	
Kelvin	
Zener	
Poynting-Thomson	
Burgers	
Kelvin généralisé	
Maxwell généralisé	

Tab. I.5 Les modèles rhéologiques courants.

l'assemblage [MGB06].

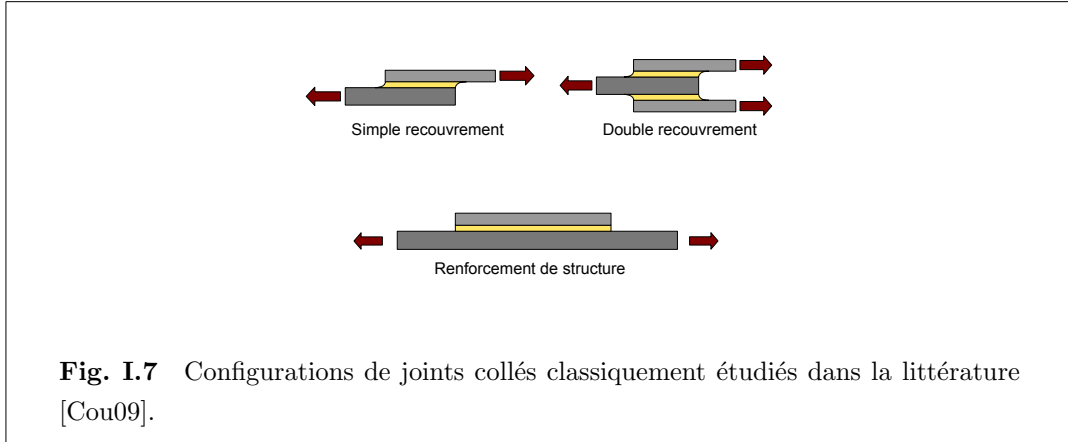
De nombreux autres travaux ont été menés, notamment sur la prise en compte des grands déplacements [Opl94] ou l'influence de la non-linéarité du comportement de la colle. Bigwood et Crocombe [BC90] ont modélisé la non-linéarité du comportement de la colle en résolvant numériquement un système non-linéaire de six équations différentielles. Adams et Mallick [AM92] ont considéré un comportement élasto-plastique de la colle en introduisant la notion de module effectif équivalent en résolvant le problème par itérations. Des études numériques ont également été menées sur l'influence de la forme du bourrelet de colle [TM95] ou de la zone d'ancrage [dSA07c] sur les pics de contraintes dans la colle. Il faut noter cependant que ces modèles prévoient généralement un pic de contrainte dans la colle au niveau du bord libre et ne respectent pas la condition de contrainte nulle à l'extrémité libre du joint. Ils surestiment donc en général le pic de contrainte se produisant effectivement dans la colle.

Le cas de renforts plans bidimensionnels de formes circulaires ou elliptiques a également été abordé analytiquement en se basant sur la méthode de l'inclusion d'Eshelby [Esh57] et en considérant la zone renforcée comme une inclusion de plus grande rigidité que le reste de la plaque. Le calcul des contraintes dans un renfort elliptique orthotrope est décrit par Rose [Ros81]. Un grand nombre d'études a été réalisé sur des patches de formes polygonales. Elles sont généralement basées sur cette méthode de l'inclusion elliptique et sur l'algorithme de Rodin [Rod96] permettant d'adapter la méthode d'Eshelby à des inclusions polygonales et polyédriques. En particulier, Duong a étudié le cas d'une plaque renforcée par un patch polygonal de manière symétrique [DY02], asymétrique [DY03a], dans le cadre des grands déplacements [DY03b], pour des chargements thermo-mécaniques [Duo04] ou encore en modélisant la diminution de l'épaisseur du patch près des bords libres [Duo06]. Ces modèles tiennent bien compte de la géométrie plane de l'assemblage étudié mais ne permettent d'évaluer que les contraintes au milieu de l'assemblage, loin des bords libres, contrairement au modèle bidimensionnel d'assemblage rectangulaire, qui permet une analyse plus fine du couplage entre les deux directions de l'assemblage sur toute la surface considérée.

Le tableau I.6 synthétise les principaux modèles analytiques de joints à simple recouvrement et précise dans chaque cas les hypothèses émises.

Auteurs	Loi de comportement des matériaux	Adhérents	Contraintes dans la colle			Solution
			σ_x	σ_z	τ_{xz}	
	Colle Linéaire	Isotrope				Numérique
Volkersen [Vol38]	✓	✓			✓	Analytique
Goland et Reissner [GR44]	✓	✓		✓	✓	✓
Wah [Wah73]	✓	✓			✓	✓
Hart-Smith [HS73a, HS73b]	✓	✓		✓	✓	✓
Pirvics [Pir74]	✓	✓		✓	✓	✓
Grimes et Greimann [GG75]	✓	✓		✓	✓	✓
Renton et Vinson [RV75a, RV75b]	✓	✓		✓	✓	
Srinivas [Sri75]	✓	✓		✓	✓	✓
Allman [All77]	✓	✓		✓	✓	✓
Ojalvo et Eidinoff [OE78]	✓	✓		✓	✓	✓
Delale et al. [DEA81]	✓	✓		✓	✓	✓
Bigwood et Crocombe [BC90]	✓	✓		✓	✓	✓
Cheng et al. [CCS91]	✓	✓		✓	✓	✓
Adams et Mallick [AM92]	✓	✓		✓	✓	✓
Tong [Ton96]	✓	✓		✓	✓	✓
Yang et Pang [YP96]	✓	✓		✓	✓	✓
Frostig et al. [FTM99]	✓	✓		✓	✓	✓
Sawa et al. [SLNT00]	✓	✓		✓	✓	✓
Mortensen et Thomsen [MT02]	✓	✓		✓	✓	✓
Adams et al. [ACW97]	✓	✓				✓
Wang et al. [WCSS03]	✓	✓		✓	✓	✓
Smeltzer et Klang [SK03]	✓	✓		✓	✓	✓
Coudor [Cou09]	✓	✓		✓	✓	✓

Tab. I.6 Synthèse des approches disponibles dans la littérature concernant les joints à simple recouvrement [DSDNAS09].



I.4.2 Modèle unidimensionnel thermo-mécanique

L'étude classique d'une structure collée soumise à un chargement thermo-mécanique est rappelée ici. Le schéma est présenté sur la figure I.8. Les notations suivantes sont utilisées :

- l_x représente la longueur de la zone renforcée ;
- e_c , e_a et e_s représentent respectivement les épaisseurs du patch composite, de la colle et du substrat ;
- σ_{xx}^c et σ_{xx}^s représentent respectivement les contraintes longitudinales dans le patch composite et le substrat ;
- τ_{xz}^a représente le cisaillement dans la colle ;
- σ_{xx}^∞ représente la contrainte longitudinale imposée au substrat ;
- ΔT représente la variation homogène de température imposée à l'ensemble de la structure ;
- E_x et E_s représentent respectivement les modules d'Young du patch composite et du substrat ;
- α_x et α_s représentent respectivement les coefficients de dilatation du patch composite et du substrat ;
- G_a représente le module de cisaillement de la colle.

Le comportement des trois matériaux est supposé être linéaire élastique. Il s'agit d'un modèle unidimensionnel, les contraintes des trois matériaux ne dépendant que de la direction x . La figure I.8 rappelle les principaux mécanismes mis en jeu. La contrainte longitudinale dans le patch est nulle au niveau des bords libres, puis augmente de manière exponentielle jusqu'à une valeur limite. La contrainte de cisaillement dans la colle est nulle au niveau du bord libre et présente un pic légèrement

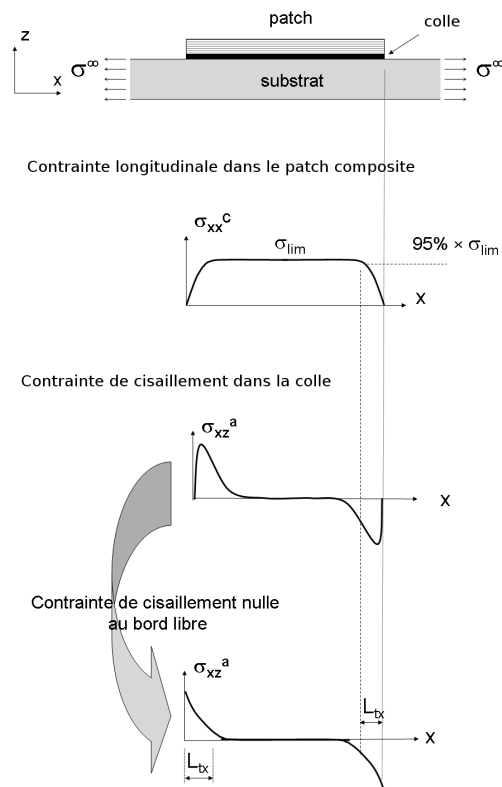


Fig. I.8 Modèle unidimensionnel d'une structure renforcée par un patch composite.

décalé par rapport à ce dernier. Afin de simplifier les calculs, une hypothèse souvent employée est de considérer que le cisaillement est maximal aux bords libres [Vol38, GR44, AW84, HL99]. Les analyses basées sur cette hypothèse tendent toutefois à surestimer le pic de contrainte dans la colle [DSDNAS09].

Le modèle présenté ci-dessous est développé suivant la direction x . L'équilibre représentatif du patch composite est présenté sur la figure I.9.

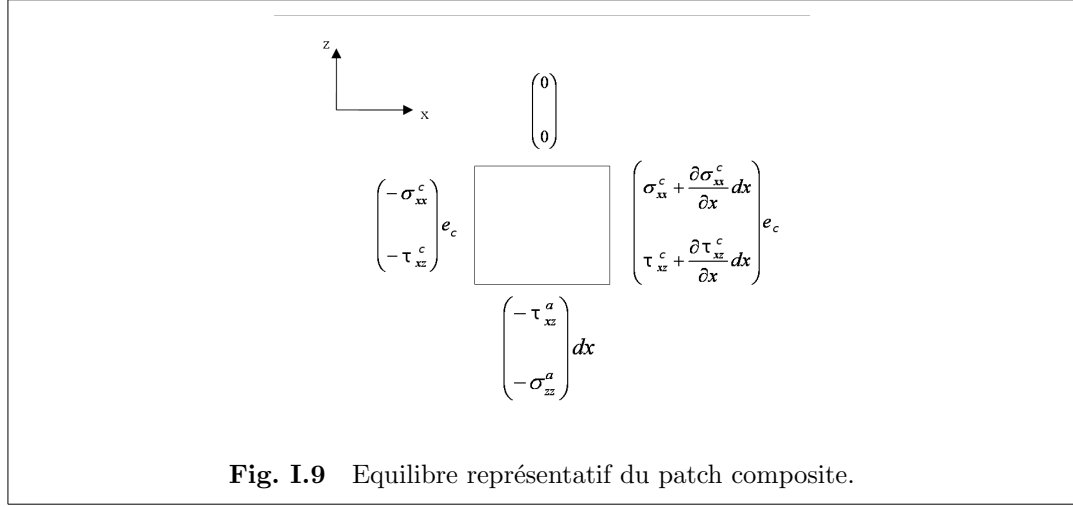


Fig. I.9 Equilibre représentatif du patch composite.

L'équation différentielle qui en résulte régit le comportement du renfort :

$$\frac{d\sigma_{xx}^c(x)}{dx^2} - A_u \sigma_{xx}^c(x) = C_u \quad (\text{I.1})$$

avec :

$$\begin{cases} A_u = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_c E_x} + \frac{1}{e_s E_s} \right) \\ C_u = \frac{G_a}{e_a e_c} \left[(\alpha_x - \alpha_s) \Delta T - \frac{\sigma_{xx}^\infty}{E_s} \right] \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^c(x=0) = 0 \\ \sigma_{xx}^c(x=l_x) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

La solution de l'équation différentielle (I.1) peut s'écrire comme une combinaison de cosinus hyperboliques et de sinus hyperboliques :

$$\sigma_{xx}^c(x) = C_1 \cosh(\sqrt{A_u}x) + C_2 \sinh(\sqrt{A_u}x) - \frac{C_u}{A_u} \quad (\text{I.4})$$

Les constantes C_1 et C_2 sont alors déterminées à l'aide des conditions aux limites. La contrainte dans le patch s'écrit finalement :

$$\sigma_{xx}^c(x) = \frac{C_u}{A_u} \left[\cosh(\sqrt{A_u}x) + \frac{1 - \cosh(\sqrt{A_u}l_x)}{\sinh(\sqrt{A_u}l_x)} \sinh(\sqrt{A_u}x) - 1 \right] \quad (\text{I.5})$$

La contrainte dans le patch composite est donc nulle au niveau du bord libre et converge vers une valeur limite loin du bord. Une longueur de transfert L_{tx} est définie. Elle correspond à la longueur nécessaire pour que cette contrainte atteigne 95% de sa valeur limite :

$$L_{tx} \simeq \frac{3}{\sqrt{A_u}} \quad (\text{I.6})$$

La déformation longitudinale du patch ε_{xx}^c est donc déduite et s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^c(x) &= \frac{\sigma_{xx}^c}{E_x} + \alpha_x \Delta T \\ &= \frac{C_u}{A_u E_x} \left[\cosh(\sqrt{A_u}x) + \frac{1 - \cosh(\sqrt{A_u}l_x)}{\sinh(\sqrt{A_u}l_x)} \sinh(\sqrt{A_u}x) - 1 \right] + \alpha_x \Delta T \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

La déformation maximale du patch est atteinte au milieu de la zone renforcée. Elle est donc donnée par $\varepsilon_{xx}^c(x = l_x/2)$. Lorsque la longueur de transfert est très inférieure à la longueur du patch, la déformation atteint un seuil maximal donné par :

$$\lim_{l_x \rightarrow \infty} \varepsilon_{xx}^c(x = l_x/2) = -\frac{C_u}{A_u E_x} + \alpha_x \Delta T \quad (\text{I.8})$$

Cette déformation maximale ne dépend donc ni du module de cisaillement de la colle, ni de son épaisseur puisque les termes " G_a/e_a " des constantes A_u et C_u se simplifient (cf. équation (I.2)).

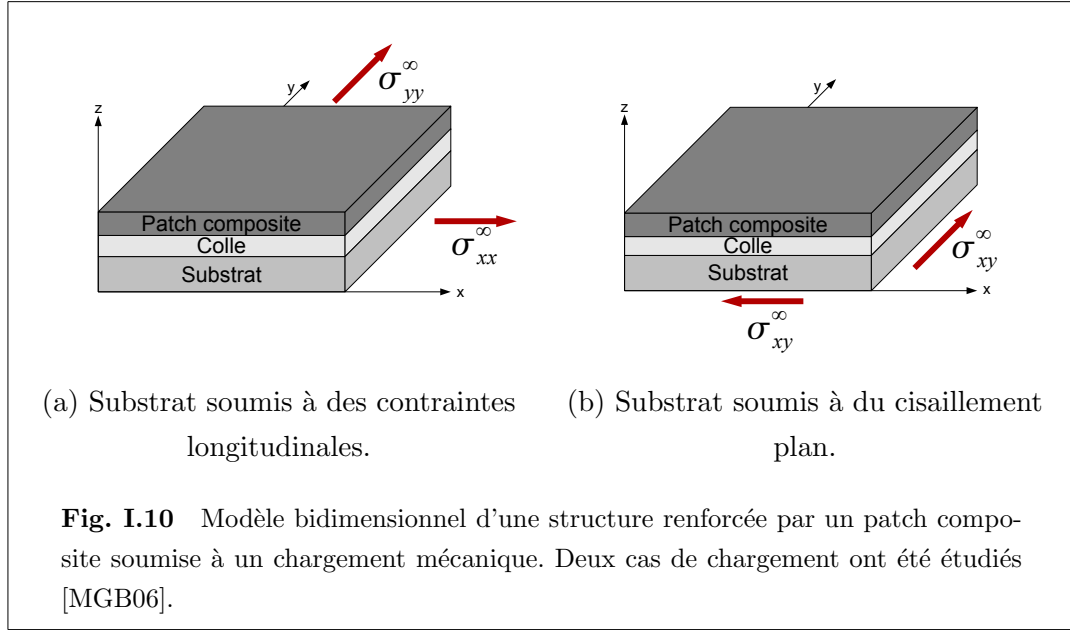
Le déplacement longitudinal u_{xx}^c du patch est alors obtenu par intégration de la déformation ε_{xx}^c :

$$u_{xx}^c(x) = \frac{C_u}{\sqrt{A_u^3} E_x} \left[\sinh(\sqrt{A_u}x) + \frac{1 - \cosh(\sqrt{A_u}l_x)}{\sinh(\sqrt{A_u}l_x)} \cosh(\sqrt{A_u}x) - x \right] + \alpha_x \Delta T x + K \quad (\text{I.9})$$

avec K une constante d'intégration.

La contrainte de cisaillement dans la colle τ_{xz}^a est obtenue quant à elle à partir de la contrainte longitudinale dans le patch composite σ_{xx}^c avec la relation suivante :

$$\tau_{xz}^a(x) = e_c \frac{d\sigma_{xx}^c}{dx} \quad (\text{I.10})$$



I.4.3 Modèle bidimensionnel mécanique

Un modèle basé sur les mêmes hypothèses que celui développé précédemment mais pour une géométrie plane rectangulaire a été développé récemment [MGB06]. Il tient compte cette fois des déformations liées aux coefficients de Poisson et met en évidence des effets bidimensionnels. La géométrie étudiée est représentée sur la figure I.10. Une solution analytique pour les distributions de contraintes dans les trois éléments, substrat, colle et patch composite, est proposée pour deux cas de chargements plans appliqués au substrat : en contraintes longitudinales ou en cisaillement. Les résultats obtenus pour les cas où le substrat est soumis à des contraintes longitudinales sont résumés ici. Les notations suivantes sont utilisées :

- l_x et l_y représentent respectivement la longueur et la largeur de la zone renforcée ;
- e_c , e_a et e_s représentent respectivement les épaisseurs du patch composite, de la colle et du substrat ;
- σ_{xx}^c et σ_{xx}^s représentent respectivement les contraintes longitudinales dans le patch composite et le substrat suivant la direction x . σ_{yy}^c et σ_{yy}^s représentent respectivement ces mêmes contraintes suivant la direction y ;
- τ_{xz}^a et τ_{yz}^a représentent respectivement le cisaillement dans la colle suivant les directions x et y ;

- σ_{xx}^∞ et σ_{yy}^∞ représentent les contraintes longitudinales imposées au substrat suivant x et y ;
- le patch composite est supposé avoir un comportement linéaire élastique orthotrope de paramètres E_x , E_y et ν_{xy} . Le substrat est supposé avoir un comportement linéaire élastique isotrope de paramètres E_s et ν_s ;
- α_x , α_y et α_s représentent respectivement les coefficients de dilatation du patch composite suivant les directions x et y et du substrat ;
- G_a représente le module de cisaillement de la colle.

Dans ce cas, le système d'équations différentielles qui régit le comportement de l'assemblage collé est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c}{\partial x^2} = A\sigma_{xx}^c + B\sigma_{yy}^c + C \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}^c}{\partial y^2} = D\sigma_{xx}^c + E\sigma_{yy}^c + F \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

avec :

$$\begin{cases} A = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_c E_x} + \frac{1}{e_s E_s} \right) \\ B = -\frac{G_a}{e_a} \left(\frac{\nu_{xy}}{e_c E_x} + \frac{\nu_s}{e_s E_s} \right) \\ C = \frac{G_a}{e_a e_c} \left(\frac{\nu_s}{E_s} \sigma_{yy}^\infty - \frac{1}{E_s} \sigma_{xx}^\infty \right) \\ D = -\frac{G_a}{e_a} \left(\frac{\nu_{yx}}{e_c E_y} + \frac{\nu_s}{e_s E_s} \right) \\ E = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_c E_y} + \frac{1}{e_s E_s} \right) \\ F = \frac{G_a}{e_a e_c} \left(\frac{\nu_s}{E_s} \sigma_{xx}^\infty - \frac{1}{E_s} \sigma_{yy}^\infty \right) \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

La résolution de ce système est obtenue à l'aide de séries de Fourier. Le champ de contraintes longitudinales dans le patch composite suivant la direction x s'écrit :

$$\sigma_{xx}^c(x, y) = \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{-16H}{mn\pi^2 I_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi(\Phi_m + y)}{2\Phi_m + l_y}\right) \quad (\text{I.13})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} G = E \times A - B \times D \\ H = C \times E - F \times B \\ d_m = \frac{E\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + G}{\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + A} \\ \Phi_m = -\frac{1}{\sqrt{d_m}} \ln \left(1 - \frac{Cd_m}{H}\right) \quad \text{condition : } \frac{Cd_m}{H} < 1, \forall m = 1, 3, 5, \dots \infty \\ I_{mn} = \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{2\Phi_m + l_y}\right)^2 + A \left(\frac{n\pi}{2\Phi_m + l_y}\right) + E \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + G \end{array} \right. \quad (\text{I.14})$$

La solution suivant la direction y est obtenue de manière symétrique. Il est à noter que ce modèle ne tient pas compte des chargements d'origine thermique. C'est ce modèle analytique qui est étendu à ce type de chargement au chapitre II.

I.4.4 Modélisation de la viscoélasticité linéaire

Les rappels ci-dessous seront utiles dans les développements conduits aux chapitres III et IV.

I.4.4.1 Formulation du comportement viscoélastique linéaire

La viscoélasticité linéaire permet de rendre compte d'un comportement réversible qui évolue au cours du temps. Une caractéristique majeure de ce comportement est la propriété de mémoire du matériau vis-à-vis de l'histoire des sollicitations. Quelques remarques générales sur la modélisation de ce phénomène sont données ci-dessous. Elles sont extraites de [JDV99], qui a modélisé le comportement différé d'assemblages comportant des matériaux vieillissants. Cette méthode a servi de point de départ pour l'analyse menée au chapitre IV en la modifiant pour le cas étudié ici. La réponse au cours du temps d'un matériau viscoélastique soumis à un chargement mécanique est caractérisée par sa fonction de fluage J ou de relaxation R . Ces fonctions représentent la réponse du matériau à une sollicitation unité. Elles s'écrivent sous les formes duales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(t) = J(t_0, t - t_0) \sigma^0 = J(t_0, t) \sigma^0 \\ \sigma(t) = R(t_0, t - t_0) \varepsilon^0 = R(t_0, t) \varepsilon^0 \end{array} \right. \quad (\text{I.15})$$

A l'instant t , ces fonctions dépendent du temps d'application $t - t_0$ de la sollicitation et des propriétés du matériau à l'instant t_0 de la sollicitation. L'hypothèse de linéarité implique que ces fonctions caractéristiques du matériau sont indépendantes du niveau de la sollicitation. Ceci permet également d'appliquer le principe de superposition de Boltzmann lorsque la sollicitation varie en sommant les contributions de chaque incrément infinitésimal de la sollicitation :

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = J(t_0, t)\sigma(t_0) + \int_{t_0}^t J(\tau, t)\dot{\sigma}(\tau)d\tau \\ \sigma(t) = R(t_0, t)\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t R(\tau, t)\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

Les équations (I.16) sont appelées équations de Boltzmann. Après intégration par parties, ces équations se mettent sous la forme d'équations de Volterra :

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = J(t, t)\sigma(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial J(\tau, t)}{\partial \tau} \sigma(\tau)d\tau \\ \sigma(t) = R(t, t)\varepsilon(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial R(\tau, t)}{\partial \tau} \varepsilon(\tau)d\tau \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

I.4.4.2 Résolution d'un problème viscoélastique linéaire

La formulation d'un problème mettant en jeu au moins un matériau viscoélastique fait apparaître une variable supplémentaire, le temps. S'ajoutent alors à la loi de comportement viscoélastique :

- les équations d'équilibre statique qui doivent être vérifiées à tout instant ;
- les relations cinématiques (notamment les conditions d'intégrabilité) ;
- les conditions aux limites (éventuellement variables).

L'existence et l'unicité de la solution pour le cas d'un matériau vieillissant ont été prouvées dans [DD93]. Les différentes méthodes permettant de résoudre un problème de structure viscoélastique sont multiples. Elles dépendent des hypothèses simplificatrices choisies. Quelques méthodes sont listées ci-dessous :

- la méthode du module effectif : l'équation de Boltzmann (I.16) en fluage est intégrée en supposant que $J(\tau, t) = J(t_0, t)$;
- la méthode de la contrainte moyenne : l'équation de Boltzmann (I.16) en fluage est intégrée remplaçant $J(\tau, t)$ par sa valeur moyenne sur l'intervalle ;
- la méthode du temps équivalent [AE92] ;
- la méthode incrémentale [BW74, JDV99].

Cette dernière méthode a été employée notamment pour évaluer les contraintes dans une structure en béton en modélisant le vieillissement de ce matériau. La méthode développée au chapitre IV est développée sur un schéma similaire.

I.4.4.3 Présentation de la méthode incrémentale

La méthode incrémentale, développée dans [JDV99], a initialement été proposée par [BW74] et se base sur le modèle de Maxwell généralisé (cf. tableau I.5) :

$$\begin{cases} \text{- pour le ressort : } \dot{\sigma}_0 = E_0(t)\dot{\varepsilon} \\ \text{- pour les } r \text{ branches : } \dot{\sigma}_\mu + \alpha_\mu(t)\sigma_\mu = E_\mu(t)\dot{\varepsilon} \text{ avec : } \alpha_\mu(t) = \frac{E_\mu(t)}{\eta_\mu(t)} \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

La fonction de relaxation $R(t_0, t)$ est écrite sous la forme d'une série de Dirichlet :

$$R(t_0, t) = \sum_{\mu=0}^r E_\mu(t_0)e^{-\alpha_\mu(t-t_0)} \quad (\text{I.19})$$

avec $\alpha_0 = 0$.

La contrainte σ s'écrit alors comme la contribution de toutes les branches du modèle de Maxwell :

$$\sigma(t) = \sum_{\mu=0}^r \sigma_\mu(t) \quad (\text{I.20})$$

avec :

$$\sigma_\mu(t) = E_\mu(t_0)e^{-\alpha_\mu(t-t_0)}\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t E_\mu(\tau)e^{-\alpha_\mu(t-\tau)}\dot{\varepsilon}(\tau) \quad (\text{I.21})$$

Le principe de cette méthode consiste alors à écrire les contraintes en $t + \Delta t$ en fonction de celles calculées à l'instant t . Pour permettre de simplifier les équations, les $\alpha_\mu(t)$ sont supposés constants par rapport au temps. Les fonctions $E_\mu(t)$ et $\varepsilon(t)$ sont supposées être linéaires sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, ce qui donne pour chaque branche μ :

$$\sigma_\mu(t + \Delta t) = \sigma_\mu(t)e^{-\alpha_\mu\Delta t} + \frac{\Delta\varepsilon}{\alpha_\mu\Delta t} \left(E_\mu(t) \left(1 - e^{-\alpha_\mu\Delta t} \right) + \Delta E_\mu \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha_\mu\Delta t}}{\alpha_\mu\Delta t} \right) \right) \quad (\text{I.22})$$

Le cas $\mu = 0$, correspondant à la branche élastique du modèle de Maxwell, est traité comme la limite d'une branche viscoélastique quand α_μ tend vers zéro, ce qui donne :

$$\sigma_0(t + \Delta t) = \sigma_0(t) + \Delta\varepsilon \left(E_0(t) + \frac{\Delta E_0}{2} \right) \quad (\text{I.23})$$

Cette méthode tient donc compte de l'évolution des paramètres E_μ pour un matériau vieillissant, donc dont les propriétés évoluent au fil du temps. Cette méthode sert de base pour le développement de la solution thermo-viscoélastique présentée au chapitre IV où cette fois les propriétés du matériau évoluent en fonction de la température.

I.5 Conclusion

Le contexte industriel et les questions qui sont à l'origine des travaux présentés dans cette thèse ont été exposés. Les travaux développés dans les chapitres suivants s'appuient donc sur des modèles existants dont les principaux ont été présentés brièvement. Ceci a permis de mettre en évidence les principaux mécanismes qui entrent en jeu lorsqu'une structure collée est soumise à une variation de température ainsi que les problèmes soulevés par l'assemblage de deux matériaux différents.

L'étude des contraintes d'origine thermique au sein d'un assemblage collé de forme rectangulaire est présentée au chapitre II. Ces contraintes sont causées par la différence des coefficients de dilatation des éléments assemblés, mais un couplage des champs de contraintes apparaît en plus entre les deux directions de la structure. Ce couplage est lié à la géométrie étudiée et à la différence entre les coefficients de Poisson des éléments assemblés. Il se traduit par une modulation des résultats classiques unidirectionnels entre les contraintes obtenues aux bords libres et au centre de l'assemblage. Plusieurs types de patches sont alors étudiés analytiquement en terme de résistance à une même sollicitation thermique. Une comparaison des résultats est ensuite présentée.

La caractérisation du comportement de la colle Redux 312 est présentée au chapitre III. Plusieurs types d'essais sont conduits dans ce but. En particulier, des essais de relaxation menés à plusieurs températures ont permis d'obtenir les paramètres d'une loi de comportement thermo-viscoélastique de la colle utilisable dans un modèle de calcul.

Le calcul des contraintes dans un assemblage collé prenant en compte ce comportement thermo-viscoélastique de la colle est développé en détail au chapitre IV. Les différents phénomènes apparaissant alors sont étudiés pour des cas de complexité croissante en analysant l'évolution du pic de cisaillement dans la colle au fil du temps pour une augmentation ou une diminution de la température et pour différentes vitesses de variation. Les résultats obtenus par ce modèle de calcul sont ensuite com-

parés aux modèles classiquement utilisés.

Enfin, des essais sur éprouvettes patchées sont présentés au chapitre V. Plusieurs types d'essais sont réalisés. D'abord des essais au cours desquels l'éprouvette est soumise à une simple variation de température. Les champs de déformations du patch sont alors mesurés par la méthode de la grille puis comparés à ceux calculés analytiquement. Les premiers résultats obtenus en cumulant une variation de température et un chargement mécanique sont finalement présentés. L'objectif de ces derniers essais est de déceler un effet viscoélastique lié à la vitesse d'application du chargement mécanique.

Chapitre II

Modèle analytique bidimensionnel d'un renfort soumis à un chargement thermique

Ce chapitre est consacré au développement d'une solution analytique pour le calcul des contraintes dans un assemblage collé de forme rectangulaire soumis à un chargement thermique. La solution, obtenue à l'aide de séries de Fourier, est ensuite appliquée pour différents matériaux couramment utilisés dans l'aéronautique, mettant ainsi en évidence des phénomènes de couplage entre les deux directions du problème.

Sommaire

II.1	Introduction	31
II.2	Présentation du problème	33
II.2.1	Géométrie et notations	33
II.2.2	Hypothèses	33
II.3	Résolution analytique du problème 2D	35
II.3.1	Equations d'équilibre	35
II.3.2	Résolution par séries de Fourier	38
II.3.3	Remarques	40
II.4	Exemples d'applications	41
II.4.1	Introduction	41
II.4.2	Cas d'un renfort isotrope	43
II.4.3	Cas d'un patch unidirectionnel carbone/époxyde	46
II.4.4	Cas d'un patch croisé $[0/90]_s$ carbone/époxyde	50
II.4.5	Cas d'un patch unidirectionnel bore/époxyde	52
II.4.6	Cas d'un patch en GLARE	54
II.5	Comparaison des résultats	56
II.5.1	Critère de rupture du patch : critère de Tsai-Wu	56
II.5.2	Critère de rupture de la colle et de l'aluminium : critère de Von Mises	60
II.5.3	Bilan comparatif	61
II.6	Conclusion	64

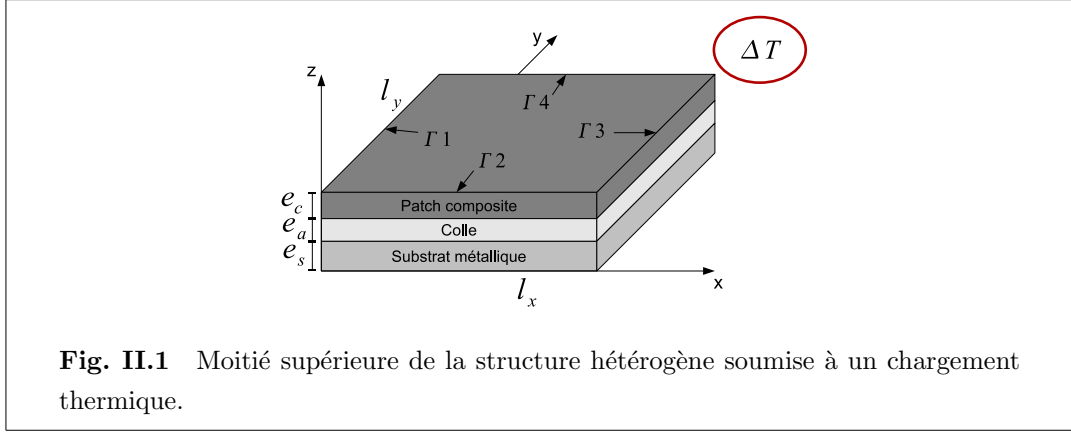
II.1 Introduction

LE CALCUL des distributions de contraintes dans un assemblage collé est une question-clé dans différents domaines comme l'aéronautique [BJ88] ou le génie civil [HL99]. Plusieurs modèles de calcul ont été proposés pour l'évaluation des contraintes dans un joint collé. D'abord dans le cadre d'hypothèses simples, pour des matériaux linéaires élastiques [Vol38, GR44], puis des modèles de plus en plus complexes ont vu le jour, prenant en compte par exemple le filet de colle se formant au bord d'un patch [TM95], les grandes déformations [Opl94] ou encore le comportement élasto-plastique de la colle [HS73b, HS73a]. Tous ces modèles sont uniquement valables dans le cadre d'une étude unidirectionnelle où les éléments collés ne sont soumis qu'à des chargements suivant une seule direction. Ils s'avèrent donc insuffisants pour le calcul des contraintes dans les structures de géométries planes bidimensionnelles couramment rencontrées dans le renforcement de structures aéronautiques [BRJ02].

Certains modèles permettent pourtant d'évaluer les contraintes au sein de patches de formes polygonales. Ils sont basés sur la méthode de l'inclusion d'Eshelby [Esh57] et sur l'algorithme de Rodin traitant les inclusions polygonales ou polyédriques. Les contraintes apparaissant dans une structure renforcée par un patch polygonal ont ainsi été calculées pour des configurations de complexité croissante : d'abord pour une structure renforcée symétriquement par deux patches polygonaux [DY02], puis pour une structure renforcée d'un seul côté [DY03a], puis en prenant en compte les grandes déformations [DY03b] ou les chargements thermo-mécaniques [Duo04]. Cependant, seules les contraintes au centre du patch sont calculées et il n'est pas fait mention des contraintes de cisaillement dans la colle. Ces modèles permettent donc d'évaluer, par exemple, les contraintes apparaissant en front de fissure dans une structure renforcée par un patch polygonal, mais pas les pics de cisaillement dans la colle en bord de patch. Un modèle analytique bidimensionnel a donc été développé pour des patches rectangulaires soumis à des chargements mécaniques plans [MGB06]. Les patches généralement utilisés pour le renfort ou la réparation de structures aéronautiques sont plutôt de forme elliptique ou polygonale et présentent de plus une diminution de l'épaisseur au niveau des bords afin de limiter le pic de cisaillement dans la colle. Ce-

pendant, le choix d'une géométrie rectangulaire permet de résoudre analytiquement le système d'équations et donc de calculer les distributions de contraintes dans chacun des éléments de la structure collée dans le cadre d'hypothèses classiques, évitant ainsi de passer par une étude par éléments finis. Bien que cette forme ne soit donc pas exactement celle utilisée en pratique pour les patchs dans le cadre du renforcement de structures aéronautiques, elle présente l'intérêt de permettre une étude de l'influence de chacun des paramètres sur les champs de contraintes obtenus ainsi qu'une meilleure compréhension des phénomènes liés à la géométrie plane des structures collées. Cette étude pourrait donc être appliquée à tout type d'assemblage collé de deux matériaux différents soumis à un chargement thermique. Des effets bidimensionnels dus à la géométrie de l'assemblage et aux propriétés des matériaux sont ainsi mis en évidence et quantifiés.

Les matériaux assemblés présentent ici des caractéristiques thermiques différentes. En effet, les fibres de carbone ou de bore, qui sont le plus souvent utilisées dans les patchs composites, présentent un coefficient de dilatation thermique très inférieur à celui de l'aluminium dans le sens des fibres. Des contraintes thermiques apparaissent donc lorsque la température s'éloigne de celle à laquelle ces matériaux ont été assemblés, généralement autour de 120 °C, en particulier lors du retour à température ambiante. Le patch composite est généralement soumis à de la compression et le substrat métallique à de la traction, ce qui peut s'avérer dangereux en cas de réparation d'une structure déjà fissurée. En effet, ces contraintes de traction résiduelles dans le substrat augmentent le facteur d'intensité de contrainte, favorisant ainsi le taux de croissance des fissures par fatigue [BRJ02]. De plus, en cours de fonctionnement, l'assemblage collé peut être soumis à des variations cycliques de température qui, cumulées aux chargements mécaniques, peuvent provoquer une défaillance de la structure collée par rupture et/ou décollement du patch. Il est donc important de bien estimer les contraintes d'origine thermique. Ce problème a déjà été traité dans la littérature pour des renforts circulaires, symétriques ou non, pour un patch isotrope ou orthotrope [WE99, WRCB00]. L'objectif de ce chapitre est d'ajouter au modèle mécanique bidimensionnel de patch rectangulaire, développé récemment par [MGB06], la possibilité de prendre en compte les propriétés thermiques des différents matériaux assemblés afin d'évaluer les distributions de contraintes dans le patch, la colle et le substrat. Les équations d'équilibre sont donc posées, puis le système d'équations différentielles obtenu est résolu à l'aide de séries de Fourier. Plusieurs exemples sont ensuite traités et analysés pour mettre en évidence des effets bidimensionnels.



II.2 Présentation du problème

II.2.1 Géométrie et notations

L'objectif de cette partie est de développer un modèle analytique permettant de calculer les distributions de contraintes résultant d'un chargement thermique dans une structure hétérogène de forme rectangulaire (cf. figure II.1). Elle représente la moitié supérieure d'une structure symétrique composée d'un substrat métallique, de deux couches de colle et de deux patches en matériau composite. Les notations suivantes sont utilisées :

- la longueur et la largeur de l'assemblage sont notées respectivement l_x et l_y ;
- l'épaisseur du patch composite, la demi-épaisseur du substrat et l'épaisseur d'une couche de colle sont notées respectivement e_c , e_s et e_a ;
- E_s et ν_s représentent le module d'Young et le coefficient de Poisson du substrat ;
- G_a représente le module de cisaillement de la colle ;
- E_x et E_y représentent les modules d'Young du patch composite suivant les directions x et y ; ν_{xy} , le coefficient de Poisson principal du patch composite ;
- α_x et α_y représentent les coefficients de dilatation thermique du patch composite selon les directions x et y . α_s représente le coefficient de dilatation thermique du substrat.

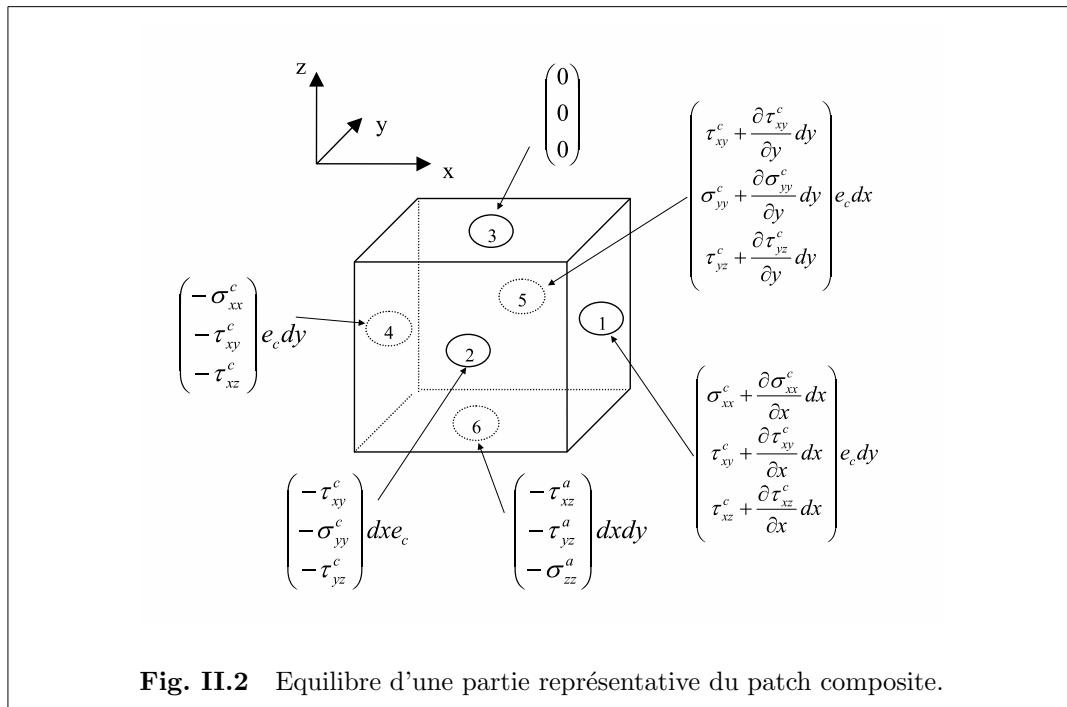
II.2.2 Hypothèses

La structure est supposée être symétrique par rapport à son plan médian (x, y) afin d'éviter toute flexion hors-plan de l'assemblage. Il faut noter qu'en pratique, dans le cadre du renforcement d'une structure aéronautique, il n'y a généralement

qu'un seul côté accessible et donc renforcé. L'assemblage collé est donc généralement asymétrique, mais la structure étudiée ici est supposée être suffisamment rigide pour empêcher toute flexion hors-plan. Cette hypothèse est évidemment simplificatrice mais elle permet une première approche du problème. Le modèle développé pourrait être étendu à l'avenir en tenant compte du moment de flexion de l'assemblage. Il en résulte que, dans le cas présent, le substrat et le composite ne sont soumis qu'à des chargements dans le plan (x, y) . Les contraintes longitudinales suivant les directions x et y dans le substrat sont notées respectivement σ_{xx}^s et σ_{yy}^s . La colle est supposée être soumise à du cisaillement transverse uniquement : les contraintes τ_{xz}^a et τ_{yz}^a sont supposées être constantes dans l'épaisseur de la couche de colle. Les contraintes longitudinales dans le patch composite sont notées respectivement σ_{xx}^c et σ_{yy}^c suivant les directions x et y . Toutes les contraintes décrites ci-dessus varient en fonction de x et y . L'objectif est de calculer ces champs de contraintes lorsque la structure est soumise à un chargement thermique.

Pour des raisons de simplicité, le modèle présenté ici est développé pour des matériaux dont les lois de comportement sont élastiques linéaires et dont les caractéristiques ne varient pas en fonction de la température ou du temps. Cette hypothèse est particulièrement critiquable pour la colle. En effet, la colle Redux 312 présente un comportement non-linéaire [MDB⁺07] et ses propriétés dépendent fortement de la température [dSA07a, dSA07b, DMBS07]. Ces non-linéarités seront évaluées au chapitre III puis intégrées dans un modèle de calcul spécifique au chapitre IV. Enfin, le substrat est supposé avoir un comportement isotrope et le patch composite un comportement orthotrope en membrane, avec des directions d'orthotropie parallèles aux bords du patch.

Il faut également souligner que le substrat métallique et le patch ont les mêmes dimensions extérieures l_x et l_y et qu'aucun chargement mécanique n'est appliqué au niveau des bords libres Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 et Γ_4 (cf. figure II.1). Le cas d'un assemblage collé rectangulaire soumis à un chargement mécanique bidimensionnel a déjà été traité en détail par JD Mathias [MGB06]. Dans le cas d'une structure soumise à des chargements thermiques et mécaniques, il suffit de superposer les deux solutions.



II.3 Résolution analytique du problème 2D

II.3.1 Equations d'équilibre

L'étude de l'équilibre dans le cas unidimensionnel est classique. Elle est rappelée au chapitre I. Une solution pour les distributions de contraintes dans le plan (x, y) est développée dans ce paragraphe. Cette solution est basée sur l'approche décrite dans [MGB06] où seuls des chargements mécaniques sont considérés, en ajoutant ici la dilatation des matériaux assemblés et la possibilité d'imposer une variation de température homogène à la structure. La prise en compte des propriétés thermiques des matériaux apporte donc quelques modifications qu'il convient de prendre en compte dans notre cas.

L'équilibre d'une partie représentative du patch composite (cf. figure II.2) s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}^c}{\partial x} e_c - \tau_{xz}^a + \frac{\partial \tau_{xy}^c}{\partial y} e_c = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}^c}{\partial y} e_c - \tau_{yz}^a + \frac{\partial \tau_{xy}^c}{\partial x} e_c = 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

De la même manière, l'équilibre d'une partie représentative du substrat métallique

s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}^s}{\partial x} e_s + \tau_{xz}^a + \frac{\partial \tau_{xy}^s}{\partial y} e_s = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}^s}{\partial y} e_s + \tau_{yz}^a + \frac{\partial \tau_{xy}^s}{\partial x} e_s = 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Dans le cas d'un chargement thermique, les contraintes de cisaillement plan dans le composite τ_{xy}^c et dans le substrat τ_{xy}^s sont supposées égales à zéro. Les deux systèmes d'équations précédents se réduisent donc à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}^c}{\partial x} e_c = \tau_{xz}^a \\ \frac{\partial \sigma_{yy}^c}{\partial y} e_c = \tau_{yz}^a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}^s}{\partial x} e_s = -\tau_{xz}^a \\ \frac{\partial \sigma_{yy}^s}{\partial y} e_s = -\tau_{yz}^a \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Les équations précédentes sont combinées pour faire disparaître les τ_{xz}^a et τ_{yz}^a , ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}^s e_s + \sigma_{xx}^c e_c) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yy}^s e_s + \sigma_{yy}^c e_c) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Comme mentionné dans le paragraphe II.2, les bords du substrat et du patch sont libres de contraintes, ainsi $\sigma_{xx}^s = \sigma_{xx}^c = 0$ le long de Γ_1 et Γ_3 et $\sigma_{yy}^s = \sigma_{yy}^c = 0$ le long de Γ_2 et Γ_4 (cf. figure II.1). Par conséquent, l'intégration de l'équation (II.4) conduit à :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^s e_s + \sigma_{xx}^c e_c = 0 \\ \sigma_{yy}^s e_s + \sigma_{yy}^c e_c = 0 \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Donc :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^s = -\frac{e_c}{e_s} \sigma_{xx}^c \\ \sigma_{yy}^s = -\frac{e_c}{e_s} \sigma_{yy}^c \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Les contraintes de cisaillement transverse τ_{xz}^a et τ_{yz}^a sont supposées constantes dans l'épaisseur de colle, d'où :

$$\begin{cases} \tau_{xz}^a = G_a \gamma_{xz}^a = G_a \times \frac{u_x^c - u_x^s}{e_a} \\ \tau_{yz}^a = G_a \gamma_{yz}^a = G_a \times \frac{u_y^c - u_y^s}{e_a} \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

où u_x^c et u_x^s sont les déplacements respectifs du patch composite et du substrat selon la direction x . De la même manière, u_y^c et u_y^s sont les déplacements selon la direction y . Le remplacement de τ_{xz}^a et τ_{yz}^a par ces expressions dans l'équation (II.3) mène à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}^c}{\partial x} = G_a \times \frac{u_x^c - u_x^s}{e_a e_c} \\ \frac{\partial \sigma_{yy}^c}{\partial y} = G_a \times \frac{u_y^c - u_y^s}{e_a e_c} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Ces deux équations sont alors dérivées respectivement par rapport à x et y pour faire apparaître les déformations longitudinales dans le patch composite et dans le substrat :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c}{\partial x^2} = G_a \times \frac{\varepsilon_{xx}^c - \varepsilon_{xx}^s}{e_a e_c} \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}^c}{\partial y^2} = G_a \times \frac{\varepsilon_{yy}^c - \varepsilon_{yy}^s}{e_a e_c} \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

où ε_{ij}^c et ε_{ij}^s représentent les déformations respectives du patch composite et du substrat. Les lois de comportement de ces matériaux sont supposées élastiques linéaires :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^c = \frac{1}{E_x} \sigma_{xx}^c - \frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{yy}^c + \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_{xx}^s = \frac{1}{E_s} \sigma_{xx}^s - \frac{\nu_s}{E_s} \sigma_{yy}^s + \alpha_s \Delta T \\ \varepsilon_{yy}^c = \frac{1}{E_y} \sigma_{yy}^c - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_{xx}^c + \alpha_y \Delta T \\ \varepsilon_{yy}^s = \frac{1}{E_s} \sigma_{yy}^s - \frac{\nu_s}{E_s} \sigma_{xx}^s + \alpha_s \Delta T \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

où ΔT représente la variation de température appliquée à la structure.

Il est à noter que les contraintes thermiques résultant de la dilatation de la colle sont négligées en raison de la faible rigidité de cet élément par rapport aux deux autres.

Finalement, en introduisant les équations (II.10) et (II.6) dans l'équation (II.9), l'équation différentielle suivante est obtenue :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c}{\partial x^2} = A\sigma_{xx}^c + B\sigma_{yy}^c + C \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}^c}{\partial y^2} = D\sigma_{xx}^c + E\sigma_{yy}^c + F \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

avec

$$\begin{cases} A = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_c E_x} + \frac{1}{e_s E_s} \right) \\ B = -\frac{G_a}{e_a} \left(\frac{\nu_{xy}}{e_c E_x} + \frac{\nu_s}{e_s E_s} \right) \\ C = \frac{G_a}{e_a e_c} (\alpha_x - \alpha_s) \Delta T \\ D = -\frac{G_a}{e_a} \left(\frac{\nu_{yx}}{e_c E_y} + \frac{\nu_s}{e_s E_s} \right) \\ E = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_c E_y} + \frac{1}{e_s E_s} \right) \\ F = \frac{G_a}{e_a e_c} (\alpha_y - \alpha_s) \Delta T \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Le système d'équations différentielles obtenu est couplé entre σ_{xx}^c et σ_{yy}^c . Il est découplé dans le cas où les paramètres B et D sont nuls. Comme les coefficients de Poisson sont positifs, ce découplage n'est possible que si tous les coefficients de Poisson sont supposés nuls, ce qui aboutit dans ce cas à la solution classique 1D [HS73a] suivant les directions x et y .

II.3.2 Résolution par séries de Fourier

La résolution des équations différentielles du système (II.11) est obtenue à l'aide de séries de Fourier. Suivant la direction x par exemple, la solution s'écrit sous la forme décrite dans [MGB06] :

$$\sigma_{xx}^c(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{mn} \sin(k_m x) \sin\left(k_n(y + \Phi_m)\right) \quad (\text{II.13})$$

Une expression similaire peut être écrite pour σ_{yy}^c suivant la direction y . Les coefficients F_{mn} , k_n et k_m sont identifiés en utilisant la propriété d'orthogonalité de la fonction *sinus* sur une période. Le paramètre Φ_m est un décalage qui est introduit pour pouvoir respecter les conditions aux limites le long de Γ_2 et Γ_4 , comme montré dans [MGB06] dans le cas d'un chargement mécanique. Afin de déterminer Φ_m , l'une

des frontières longitudinales est considérée, par exemple Γ_2 le long de laquelle $\sigma_{yy}^c = 0$. Dans ce cas, la première équation du système (II.11) se réduit à :

$$\frac{d^2 \sigma_{xx}^c(x, 0)}{dx^2} - A \sigma_{xx}^c = C \quad (\text{II.14})$$

Il est alors évident que l'équation obtenue est identique à celle donnée par un calcul classique des contraintes dans un assemblage collé dont la solution peut être donnée par une combinaison de fonctions *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperbolique*, comme suit :

$$\sigma_{xx}^c(x) = \frac{C_u}{A_u} \left[\cosh(\sqrt{A_u}x) + \frac{1 - \cosh(\sqrt{A_u}l_x)}{\sinh(\sqrt{A_u}l_x)} \sinh(\sqrt{A_u}x) - 1 \right] \quad (\text{II.15})$$

avec

$$\begin{cases} A_u = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{E_x e_c} + \frac{1}{E_s e_s} \right) \\ C_u = \frac{G_a}{e_a e_c} (\alpha_x - \alpha_s) \Delta T \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

La solution ci-dessus est alors comparée à la solution générale donnée par l'équation (II.13). L'expression de Φ_m est finalement obtenue en utilisant une seconde fois la propriété d'orthogonalité de la fonction *sinus* sur une période. Les calculs ne sont pas détaillés ici, ils sont similaires à ceux présentés dans [MGB06] et sont détaillés en annexe A.2. La solution suivant la direction x s'écrit finalement comme suit :

$$\sigma_{xx}^c(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{-16H}{mn\pi^2 I_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi(\Phi_m + y)}{2\Phi_m + l_y}\right) \quad (\text{II.17})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} G = E \times A - B \times D \\ H = C \times E - F \times B \\ d_m = \frac{E\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + G}{\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + A} \\ \Phi_m = -\frac{1}{\sqrt{d_m}} \ln \left(1 - \frac{Cd_m}{H} \right) \quad \text{condition : } \frac{Cd_m}{H} < 1, \forall m = 1, 3, 5, \dots \infty \\ I_{mn} = \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{2\Phi_m + l_y}\right)^2 + A \left(\frac{n\pi}{2\Phi_m + l_y}\right) + E \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + G \end{array} \right. \quad (\text{II.18})$$

Il faut noter que cette solution n'est valable que si la condition " $Cd_m/H < 1$ " est vérifiée pour tout $m = 1, 3, 5, \dots$. Si ce n'est pas le cas, il est possible de cumuler plusieurs cas de chargement vérifiant cette condition et d'ajouter ensuite les résultats obtenus séparément. Par symétrie, une solution similaire est trouvée pour l'expression de $\sigma_{yy}^c(x, y)$.

Les expressions des contraintes de cisaillement transverse dans la colle τ_{xz}^a et τ_{yz}^a sont déduites des contraintes longitudinales dans le patch σ_{xx}^c et σ_{yy}^c en utilisant l'équation (II.3) :

$$\tau_{xz}^a(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} e_c \frac{-16H}{n\pi I_{mn} l_x} \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi(\Phi_m + y)}{2\Phi_m + l_y}\right) \quad (\text{II.19})$$

II.3.3 Remarques

II.3.3.1 Calcul des contraintes longitudinales dans le patch

Les valeurs extrêmes des contraintes longitudinales dans le patch composite σ_{xx}^c et σ_{yy}^c sont localisées au centre du renfort. Si ses dimensions sont suffisamment grandes par rapport à la longueur de transfert des contraintes, le système d'équations (II.11) peut être simplifié en supposant que les contraintes σ_{xx}^c et σ_{yy}^c ont atteint leurs valeurs limites respectives $\sigma_{xx}^{c,lim}$ et $\sigma_{yy}^{c,lim}$. Ces contraintes sont donc constantes et leurs dérivées partielles sont nulles. Le système (II.11) se réduit alors à :

$$\begin{cases} A\sigma_{xx}^{c,lim} + B\sigma_{yy}^{c,lim} = -C \\ D\sigma_{xx}^{c,lim} + E\sigma_{yy}^{c,lim} = -F \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

Il suffit alors de résoudre ce système linéaire de deux équations à deux inconnues, ce qui donne :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{c,lim} = \frac{EC - FB}{BD - EA} \\ \sigma_{yy}^{c,lim} = \frac{AF - CD}{BD - EA} \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Les solutions ainsi obtenues sont également celles données classiquement pour le calcul des contraintes thermiques dans les différentes couches d'un assemblage hétérogène soumis à une variation de température. Le détail de ce type de calcul est donné par exemple dans [TH80].

Il faut noter enfin que cette solution n'est valable que si le transfert des contraintes du substrat vers le patch composite est parfait. Il s'agit d'une valeur maximale limite vers laquelle la solution converge lorsque la longueur du patch est suffisamment grande par rapport à la longueur de transfert.

II.3.3.2 Calcul des contraintes de cisaillement dans la colle

Les pics de contraintes dans la colle sont toujours localisés près des bords libres. Dans le cadre d'une étude simplifiée où seule la valeur maximale du cisaillement dans la colle est recherchée, il n'est pas nécessaire de calculer la distribution complète des contraintes, il suffit dans ce cas de calculer τ_{xz}^a en $(x, y) = (0, 0)$ ou $(0, l_y/2)$, et τ_{yz}^a en $(x, y) = (0, 0)$ ou $(l_x/2, 0)$.

II.4 Exemples d'applications

II.4.1 Introduction

L'objectif est maintenant d'utiliser la solution développée précédemment dans cinq cas différents afin de mettre en lumière quelques effets bidimensionnels qui apparaissent dans chacun des éléments en jeu dans l'assemblage collé. Le premier cas traité, purement fictif, est celui d'un renfort isotrope présentant le même coefficient de Poisson que le substrat, où seuls les coefficients de dilatation et les modules d'Young

sont différents. Les cas suivants sont plus réalistes, il s'agit d'un patch unidirectionnel en carbone/époxyde, d'un patch croisé $[0, 90]_s$ en carbone/époxyde, d'un patch unidirectionnel en bore/époxyde et enfin d'un patch en GLARE, matériau composé d'un empilement de couches d'aluminium et de fibres de verre.

Les matériaux choisis dans ces exemples sont utilisés classiquement dans le cadre du renfort de structures aéronautiques. Les propriétés mécaniques de ces patchs composites sont listées dans le tableau II.1. Les propriétés du patch croisé $[0, 90]_s$ en carbone/époxyde sont calculées à partir des propriétés du patch unidirectionnel en utilisant les formules de la théorie classique des plaques stratifiées [TH80]. Les résistances longitudinales et transverses des patchs ainsi que la résistance en cisaillement de la colle utilisée sont données dans le tableau II.2.

Le chargement appliqué à l'ensemble de la structure est une baisse de température de 100 °C. Les patchs étant collés à 120 °C environ, cette variation correspond à un retour à la température ambiante de la structure. Les propriétés des matériaux sont supposées constantes sur cette plage de température. Les calculs menés étant élastiques, les résultats obtenus pour une augmentation de température de 100 °C sont les opposés de ceux obtenus pour une baisse de température de 100 °C. Les champs de contraintes passent alors d'un état de compression à un état de traction et inversement. Comme les résistances en traction ou en compression des patchs étudiés ne sont généralement pas identiques, une augmentation de température peut s'avérer plus critique qu'une baisse identique de température, ou inversement. Les deux cas sont donc discutés dans la suite.

Pour pouvoir appliquer cette méthode, il faut que la condition " $Cd_m/H < 1$ " de l'équation (II.18) soit respectée pour tout $m = 1, 3, 5 \dots$. Comme ce n'est pas toujours le cas pour un chargement thermique seul, plusieurs chargements thermo-mécaniques sont cumulés. Chacun de ces chargements doit respecter cette condition et leur somme doit aboutir au chargement thermique souhaité. Les champs de contraintes obtenus sont alors cumulés pour aboutir au résultat souhaité. La prise en compte d'un chargement mécanique bidimensionnel s'effectue en introduisant σ_{xx}^∞ et σ_{yy}^∞ , les contraintes longitudinales appliquées au substrat aux extrémités de l'assemblage suivant les directions respectives x et y [MGB06]. Le système d'équations différentielles (II.11) ainsi que les solutions (II.17) et (II.19) restent inchangés. Seules changent les constantes

Matériau (Unité)	E_x (GPa)	E_y (GPa)	ν_{xy}	α_x ($10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$)	α_y ($10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$)
bore/époxyde	204	18.5	0.23	6.1	30.3
carbone/époxyde UD	181	10.3	0.28	0.02	22.5
carbone/époxyde [0, 90] _s	96	96	0.0302	1.5	1.5
GLARE-2 (3/2)	65.6	50.7	0.33	17.9	24.2
Aluminium	73.8	73.8	0.33	23.6	23.6
Colle	4.2	4.2	0.3		

Tab. II.1 Propriétés thermoélastiques des matériaux extraites de [TH80] pour les patchs bore/époxyde et carbone/époxyde, de [RSN98] pour le GLARE. L'aluminium est un alliage 2024-T3. Les données pour la colle sont extraites de [MGB06].

C et F de l'équation différentielle (II.11) qui deviennent alors :

$$\begin{cases} C = \frac{G_a}{e_a e_c} \left(\frac{\nu_s \sigma_{yy}^\infty}{E_s} - \frac{\sigma_{xx}^\infty}{E_s} + (\alpha_x - \alpha_s) \Delta T \right) \\ F = \frac{G_a}{e_a e_c} \left(\frac{\nu_s \sigma_{xx}^\infty}{E_s} - \frac{\sigma_{yy}^\infty}{E_s} + (\alpha_y - \alpha_s) \Delta T \right) \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Comme expliqué au paragraphe II.3.3, les dimensions du patch doivent avoir une longueur minimale pour que le transfert d'effort puisse être considéré comme complet. Les dimensions choisies ici permettent d'atteindre les valeurs maximales de contraintes dans le patch tout en gardant visibles les zones de transfert sur les figures. Ces dimensions sont les suivantes : $l_x = l_y = 20$ mm, $e_c = 0.25$ mm, $e_a = 0.15$ mm et $e_s = 1$ mm.

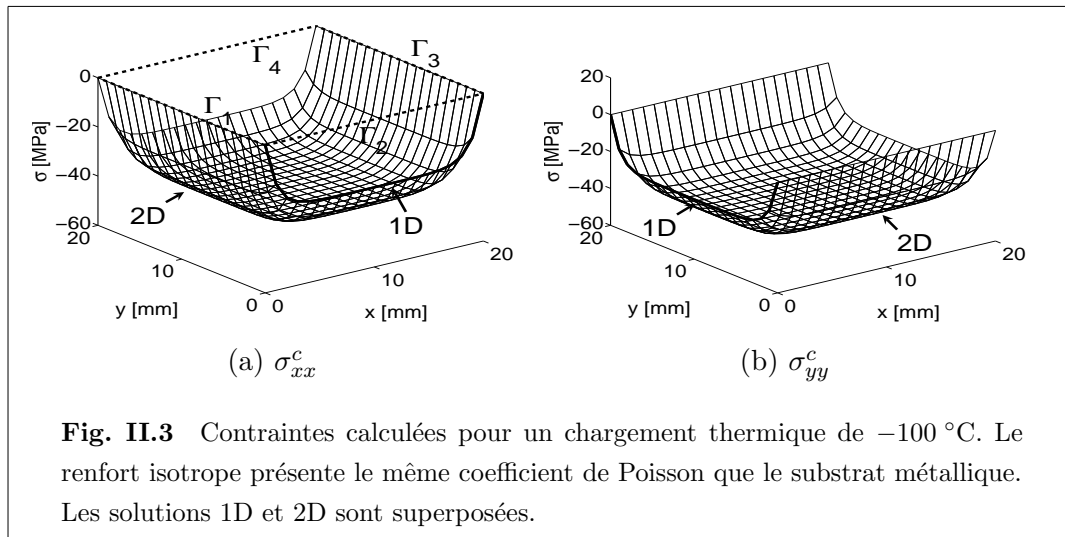
II.4.2 Cas d'un renfort isotrope

Dans ce premier exemple, l'objectif est de découpler l'effet lié à la différence des coefficients de Poisson et l'effet de la différence des coefficients de dilatation. Pour cela, tous les matériaux sont supposés isotropes, avec en plus un coefficient de Poisson identique pour tous les composants. Les résultats donnés par le modèle 2D développé précédemment sont représentés en traits fins sur la figure II.3. Ils sont comparés à un calcul unidimensionnel classique [HS73b] représenté en trait gras sur les bords des distributions de la figure II.3.

Le modèle 2D permet de calculer les contraintes suivant les directions x (cf. figure II.3(a)) et y (cf. figure II.3(b)). La symétrie des résultats obtenus est due à la

Matériau	tract. long. X	comp. long. X'	tract. trans. Y	comp. trans. Y'	cisaillement S
carbone/époxyde	1500	1500	40	246	68
bore/époxyde	1260	2500	61	202	67
GLARE-2 (3/2)	360	414	228	236	
Colle Redux 312					
22 °C					42
70 °C					38
80 °C					35
100 °C					17

Tab. II.2 Résistances des patches composites d'après [TH80] pour le carbone/époxyde et le bore/époxyde, et d'après [WY05] pour le GLARE. Les propriétés de la colle Redux 312 sont fournies par le fabricant Hexcel Composites [Com07]. Les données sont en MPa.



symétrie des propriétés des matériaux et du chargement, aussi les remarques faites dans la suite pour σ_{xx}^c sont également valables pour σ_{yy}^c .

Les résultats obtenus pour σ_{xx}^c le long de Γ_2 et Γ_4 , bords libres du patch, sont identiques pour les deux méthodes. Cela correspond bien au résultat attendu puisqu'il s'agit de la condition limite imposée au modèle 2D. Cela correspond aussi aux zones où $\sigma_{yy}^c = 0$ (cf. figure II.3(b)) et où il n'y a donc pas de déformation transverse pour modifier le résultat 1D. En dehors de ces zones, les résultats obtenus en 1D et en 2D sont cependant différents. Cette différence peut s'expliquer analytiquement en calculant pour $l_x \rightarrow +\infty$:

- la contrainte au centre du patch, notée $\tilde{\sigma}_{xx}^c$, donnée par le modèle 2D dans le cas où les matériaux en jeu sont isotropes ;
- la contrainte au centre du patch, notée $\hat{\sigma}_{xx}^c$, donnée par le modèle 1D.

Dans le cas particulier de matériaux tous isotropes, les contraintes limites au centre du patch données par l'équation (II.21) sont simplifiées par les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_x = \alpha_y = \alpha_c \\ E_x = E_y = E_c \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Ce qui aboutit à la solution suivante pour $\tilde{\sigma}_{xx}^c$ et $\tilde{\sigma}_{yy}^c$:

$$\tilde{\sigma}_{xx}^c = \tilde{\sigma}_{yy}^c = \frac{(\alpha_c - \alpha_s)\Delta T}{e_c \left(\frac{1 - \nu_c}{e_c E_c} + \frac{1 - \nu_s}{e_s E_s} \right)} \quad (\text{II.24})$$

où ν_s et ν_c sont respectivement les coefficients de Poisson du substrat et du renfort. Dans cet exemple, l'application numérique donne $\tilde{\sigma}_{xx}^c = \tilde{\sigma}_{yy}^c = -41$ MPa.

La solution 1D donnée par l'équation (II.15) permet de calculer $\sigma_{xx}^c(x = l_x/2)$ pour $l_x \rightarrow +\infty$:

$$\hat{\sigma}_{xx}^c = \frac{(\alpha_c - \alpha_s)\Delta T}{e_c \left(\frac{1}{e_c E_c} + \frac{1}{e_s E_s} \right)} \quad (\text{II.25})$$

La solution 2D de l'équation (II.24), dans le cas particulier où les matériaux présentent en plus le même coefficient de Poisson ($\nu_c = \nu_s = \nu$), se réduit alors à :

$$\tilde{\sigma}_{xx}^c = \frac{\hat{\sigma}_{xx}^c}{1 - \nu} \quad (\text{II.26})$$

Le rapport entre $\tilde{\sigma}_{xx}^c$ et $\hat{\sigma}_{xx}^c$ vaut alors $1 - \nu$. Comme ν est compris entre -1 et 0.5 , la contrainte $\tilde{\sigma}_{xx}^c$ est toujours supérieure à $\hat{\sigma}_{xx}^c$. Ce phénomène s'explique par le raidissement de l'assemblage au niveau du centre du renfort, du fait de sa géométrie.

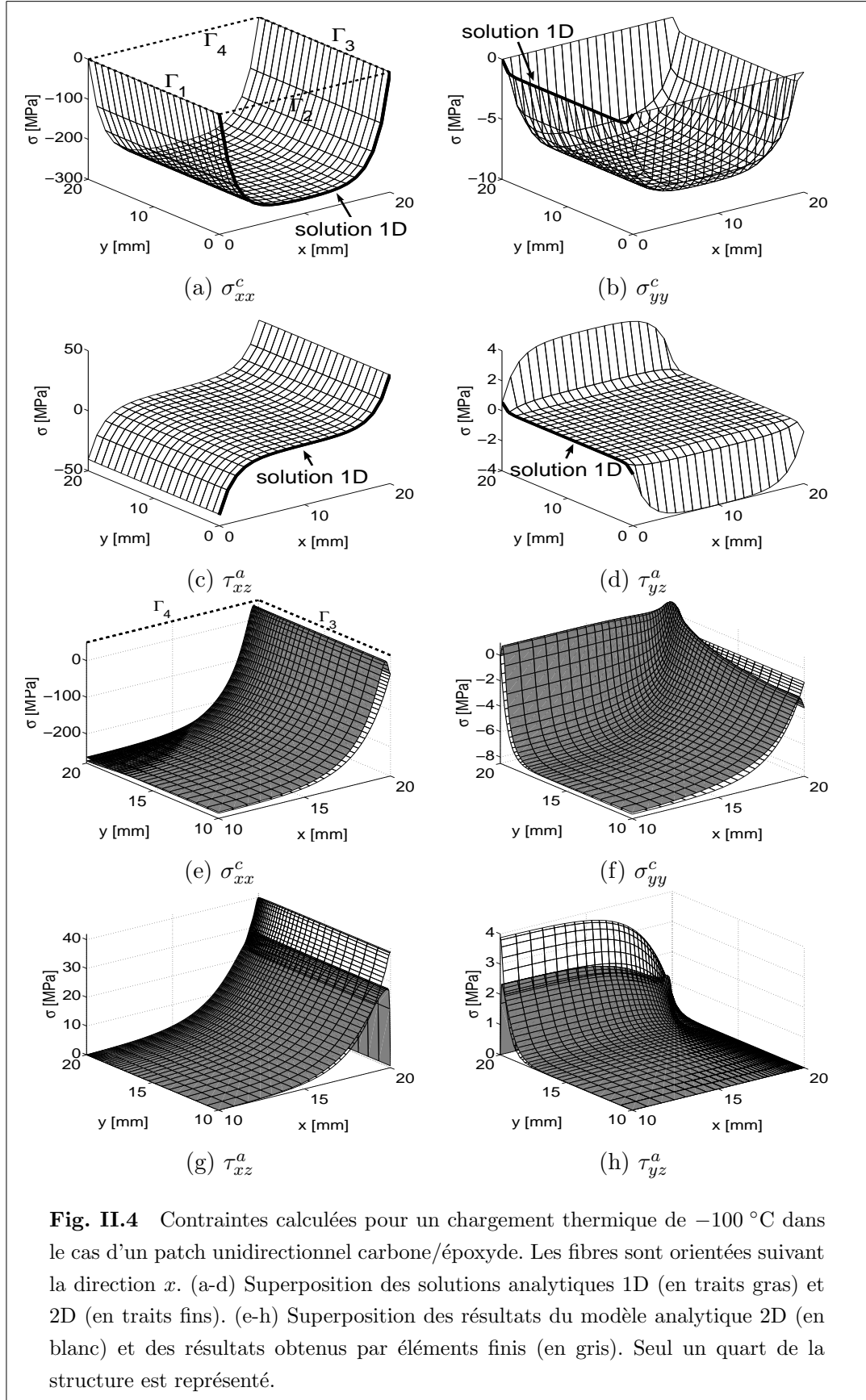
La solution 2D proposée peut donc être vue comme le passage progressif d'une solution 1D classique [HS73b, HS73a], valable au niveau du bord libre, vers une autre solution classique détaillée dans [TH80] et qui permet de déterminer les contraintes thermiques dans une structure multicouche hétérogène. Il faut noter, toutefois, que seule la solution bidimensionnelle développée ici permet de calculer la distribution complète des contraintes. De même, la solution [TH80] n'est valable que si le transfert d'effort est complet, ce qui n'est pas le cas par exemple pour des assemblages de petites dimensions ou encore si la colle a un module de cisaillement trop faible pour transmettre l'effort sur la distance disponible.

Même dans le cas où des hypothèses simplificatrices sont émises, un effet 2D lié à la géométrie du problème est donc bien mis en évidence. Dans des cas plus complexes où les matériaux en jeu sont orthotropes, d'autres effets viennent s'ajouter, liés à la différence des coefficients de dilatation ou des coefficients de Poisson. Plusieurs cas sont étudiés ci-après.

II.4.3 Cas d'un patch unidirectionnel carbone/époxyde

Les distributions des contraintes σ_{xx}^c , σ_{yy}^c , τ_{xz}^a et τ_{yz}^a , pour le cas d'un patch unidirectionnel en carbone/époxyde, sont présentées sur la figure II.4. Les fibres du patch composite sont orientées suivant la direction x . Les solutions du modèle 1D (cf. équation (II.15)) et du modèle 2D (cf. équation (II.17)) sont superposées sur les figures II.4(a-d) à des fins de comparaison. Une comparaison de la solution 2D avec un calcul par éléments finis est également représentée sur les figures II.4(e-h). Le calcul par éléments finis a été réalisé avec Ansys 11. Les symétries du problème permettent de ne modéliser qu'un quart de la structure. Le modèle EF est maillé avec 25000 éléments SOLID95 à 20 noeuds. Les contraintes dans la couche de colle ne varient presque pas suivant son épaisseur, sauf de manière localisée près des bords libres. Afin de limiter les pics de contraintes dûs aux singularités ou aux interfaces entre deux matériaux, les champs de contraintes dans la colle sont relevés dans son plan médian. De la même manière, les contraintes dans le patch composite ne varient quasiment pas suivant l'épaisseur, sauf localement à l'approche des bords libres où une déformation suivant l'axe z non prise en compte dans ce modèle modifie légèrement la distribution des contraintes. Les champs de contraintes dans le patch sont donc collectés sur la surface supérieure du patch où cette contrainte suivant z est nulle. Les remarques suivantes concernant les résultats peuvent être formulées :

- les résultats analytiques obtenus pour les contraintes longitudinales dans le



- patch composite σ_{xx}^c et σ_{yy}^c (en blanc sur les figures II.4(e-f)) sont globalement concordants avec les résultats EF (en gris). Quelques légères différences apparaissent cependant le long des frontières Γ_3 et Γ_4 . Elles proviennent sans doute d'effets 3D non pris en compte dans le modèle analytique ;
- les résultats obtenus par les deux méthodes pour les cisaillements transverses τ_{xz}^a et τ_{yz}^a sont également concordants bien que le modèle EF sous-estime les pics de contraintes au niveau des bords libres Γ_3 pour τ_{xz}^a et Γ_4 pour τ_{yz}^a (cf. figures II.4(g-h)). Un raffinement localisé du maillage au niveau du bord libre permettrait d'améliorer la précision du résultat, mais le problème de cette singularité géométrique est un phénomène bien connu dans l'étude des assemblages collés. De plus, le modèle bidimensionnel présenté ici, comme pour de nombreux modèles 1D existants, ne respecte pas la condition du cisaillement nul dans la colle au niveau des bords libres et surestime la valeur du pic de cisaillement [DSDNAS09] ;
 - comme attendu, les contraintes σ_{xx}^c et σ_{yy}^c sont nulles le long de leurs bords libres respectifs $\{\Gamma_1, \Gamma_3\}$ et $\{\Gamma_2, \Gamma_4\}$ (cf. figures II.4(a-b)) ;
 - la contrainte longitudinale au milieu du patch composite, donnée par le modèle 2D (cf. équation (II.17)) peut être comparée avec celle obtenue par le calcul de la contrainte limite (cf. équation (II.21)). Cette contrainte limite, suivant la direction x , donne $\sigma_{xx}^{c,lim} = -267$ MPa alors que le modèle 2D présenté ici donne $\sigma_{xx}^c = -266$ MPa. De la même manière, suivant la direction y , les deux approches donnent $\sigma_{yy}^c = \sigma_{yy}^{c,lim} = -8$ MPa. La solution 2D atteint donc bien la valeur asymptotique estimée par l'approche simplifiée. L'effort est donc intégralement transmis au patch sur les longueurs l_x et l_y disponibles. Dans ce cas, la solution simplifiée suffit pour évaluer les contraintes maximales au sein du patch composite, mais seule la distribution complète permet d'évaluer l'évolution des contraintes au niveau des bords et donc de remonter au cisaillement dans la colle ;
 - sur la figure II.4(b), les solutions 1D et 2D pour σ_{yy}^c sont égales le long des bords libres $\{\Gamma_1, \Gamma_3\}$. Cependant, la différence entre les deux solutions s'accroît en s'éloignant des bords : la solution 1D donne $\sigma_{yy}^c = -1$ MPa alors que la solution 2D donne $\sigma_{yy}^c = -8$ MPa. Ces contraintes sont faibles par rapport à celles obtenues suivant x , mais la différence relative entre les modèles 1D et 2D est significative. La solution 1D n'est donc pas très satisfaisante dans ce cas ;
 - étant donné que les coefficients de dilatation du patch α_x et α_y sont infé-

rieurs à celui du substrat α_s et que la variation de température est négative, le patch composite est en état de compression selon les deux directions x et y . La contrainte obtenue est bien plus élevée suivant la direction x puisque la différence des coefficients de dilatation est plus grande suivant cette direction et le module d'Young du composite également ;

- de manière plus générale, l'effet dû à la différence des coefficients de dilatation entre le substrat et le patch composite peut être directement perçu en calculant les solutions 1D le long des frontières $\{\Gamma_2, \Gamma_4\}$ pour σ_{xx}^c et $\{\Gamma_1, \Gamma_3\}$ pour σ_{yy}^c . La première étant due à la différence des coefficients de dilatation selon la direction x , et la seconde selon la direction y . Les contraintes obtenues dépendent alors à la fois de la différence de ces coefficients de dilatation et des modules d'Young du patch composite selon ces directions. L'effet 2D dû à la différence des coefficients de Poisson peut être estimé en observant la différence des résultats au niveau du bord libre et au centre du patch. A titre d'exemple, l'amplitude significative de σ_{xx}^c le long de $\{\Gamma_2, \Gamma_4\}$ est due à la différence des coefficients de dilatation entre le substrat et le patch composite suivant x , mais aussi au module d'Young élevé du patch le long des fibres. A l'inverse, suivant la direction y , la faible différence des coefficients de dilatation associée à un faible module d'Young du patch suivant la direction transverse aux fibres donne un résultat plus faible pour σ_{yy}^c le long de $\{\Gamma_1, \Gamma_3\}$;
- avec cette approche, les cisaillements transverses dans la colle τ_{xz}^a et τ_{yz}^a sont respectivement proportionnels aux dérivées des contraintes longitudinales σ_{xx}^c par rapport à x et σ_{yy}^c par rapport à y (cf. équation (II.3)). Le cisaillement τ_{yz}^a maximal est donc situé le long des frontières $\{\Gamma_2, \Gamma_4\}$ ($y = 0$ ou $y = l_y$) pour $x = l_x/2$ (cf. figure II.4(d)) ;
- les contraintes maximales calculées sont maintenant comparées aux résistances respectives des matériaux concernés (cf. tableau II.2). Les contraintes σ_{xx}^c et σ_{yy}^c , compressives dans ce cas, atteignent donc respectivement 18% et 3% des limites à la résistance en compression du patch. Le cisaillement dans la colle est comparé à la résistance donnée par le fournisseur à 22 °C. Le pic de cisaillement atteint donc dans ce cas 95% de la résistance au cisaillement. Une augmentation de température de +100 °C serait plus endommageante pour l'assemblage collé étant donné que le patch serait soumis à de la traction suivant x et y et que la résistance du patch dans le sens transverse aux fibres est plus faible en traction qu'en compression. Les contraintes atteindraient alors 18% et 20% de

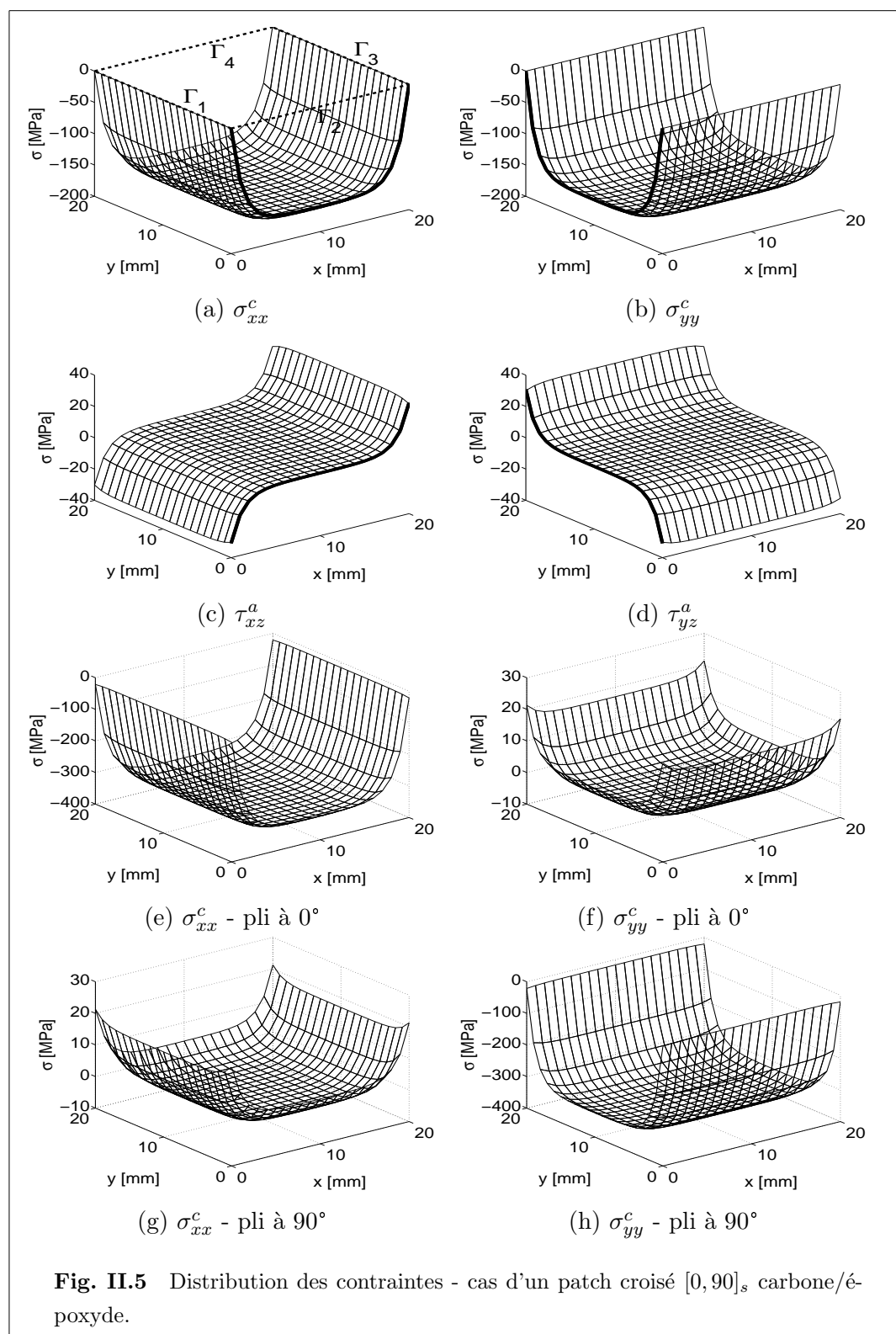
la résistance du patch. Ces calculs en résistance sont détaillés plus loin avec un critère quadratique.

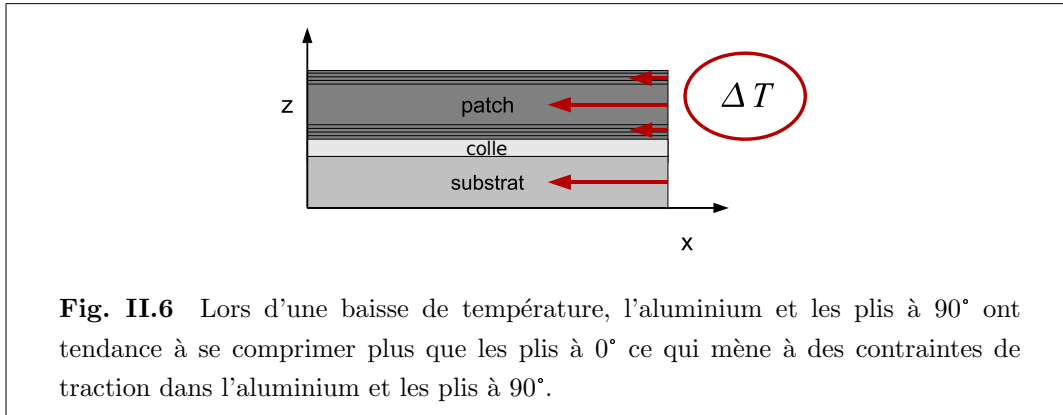
Dans cet exemple, l'effet bidimensionnel est bien visible suivant la direction y mais reste cependant assez faible en terme d'amplitude. En effet, les coefficients de dilatation du patch et du substrat suivant la direction y sont du même ordre de grandeur. D'autres configurations sont maintenant testées pour mettre en relief un effet 2D, en jouant sur d'autres valeurs des coefficients de dilatation et des coefficients de Poisson.

II.4.4 Cas d'un patch croisé [0/90]_s carbone/époxyde

Le cas d'un patch croisé [0, 90]_s en carbone/époxyde est maintenant considéré. Les calculs sont menés en utilisant pour le patch composite les propriétés du matériau homogène équivalent. Cet agencement des plis modifie fortement les valeurs des coefficients de dilatation et des coefficients de Poisson du patch homogène équivalent. Les paramètres de ce matériau sont symétriques entre les directions x et y . Les valeurs obtenues sont rappelées dans le tableau II.1. Les résultats 1D et 2D sont superposés sur la figure II.5(a-d). Les contraintes σ_{xx}^c et σ_{yy}^c sont ensuite redistribuées dans chacun des plis (cf. figure II.5(e-h)). Les remarques suivantes peuvent être formulées :

- étant donné la symétrie des propriétés des matériaux et du chargement, les résultats obtenus sont identiques selon les directions x et y ;
- en comparaison au cas précédent, les contraintes obtenues suivant la direction y (cf. figure II.5(b)) sont nettement plus élevées. Ceci est dû à une différence plus grande des coefficients de dilatation ainsi qu'à un module d'Young plus élevé que précédemment dans cette direction. Au contraire, suivant la direction x (cf. figure II.5(a)), les contraintes maximales dans le patch et dans la colle sont plus faibles que pour le cas unidirectionnel ;
- la figure II.5(a) montre clairement que σ_{xx}^c dépend presque exclusivement de x . Par symétrie, σ_{yy}^c ne dépend que de y . L'effet 2D lié aux coefficients de Poisson n'est donc pas très important dans ce cas. A titre d'exemple, le modèle 1D donne des contraintes normales maximales $\sigma_{xx}^c = \sigma_{yy}^c = -160$ MPa et le modèle 2D donne -178 MPa, soit une différence de 10% ;
- le cisaillement dans la colle est ici plus faible que celui obtenu dans le cas du patch unidirectionnel. Il atteint cependant 34 MPa, soit 80% de la limite de résistance de la colle. Ceci est dû principalement à la rigidité plus faible du patch croisé ;



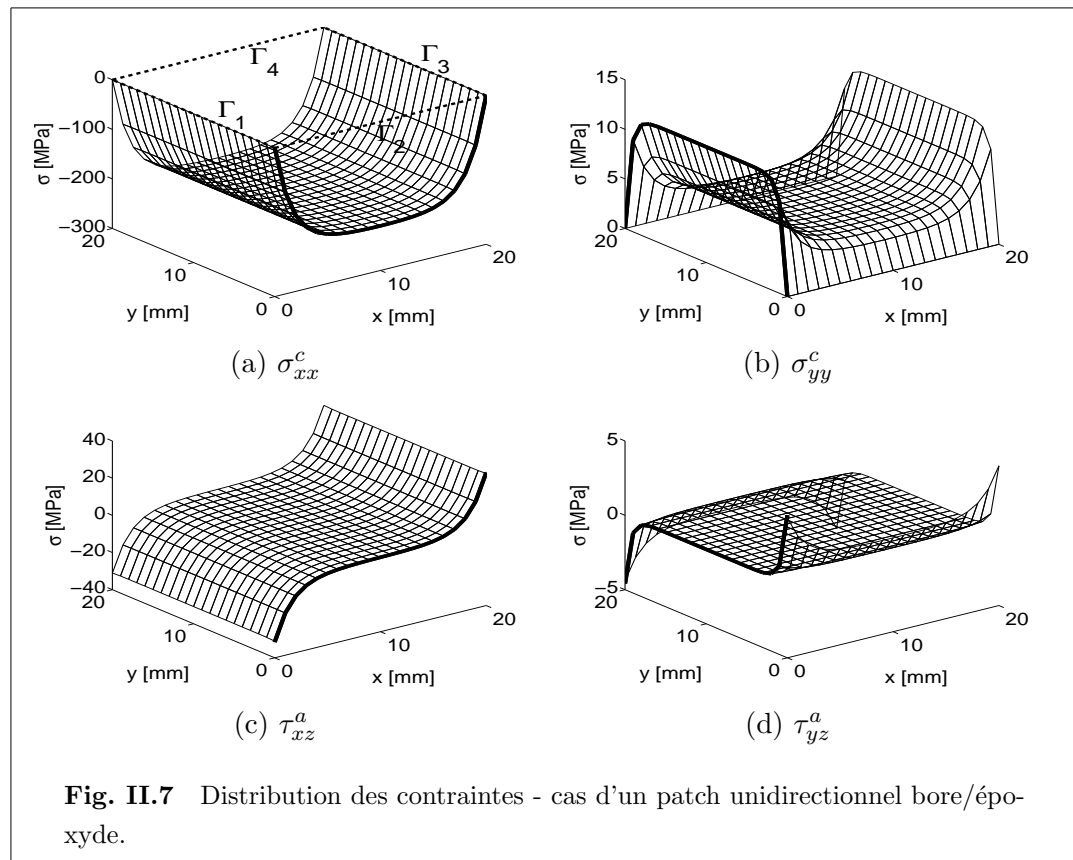


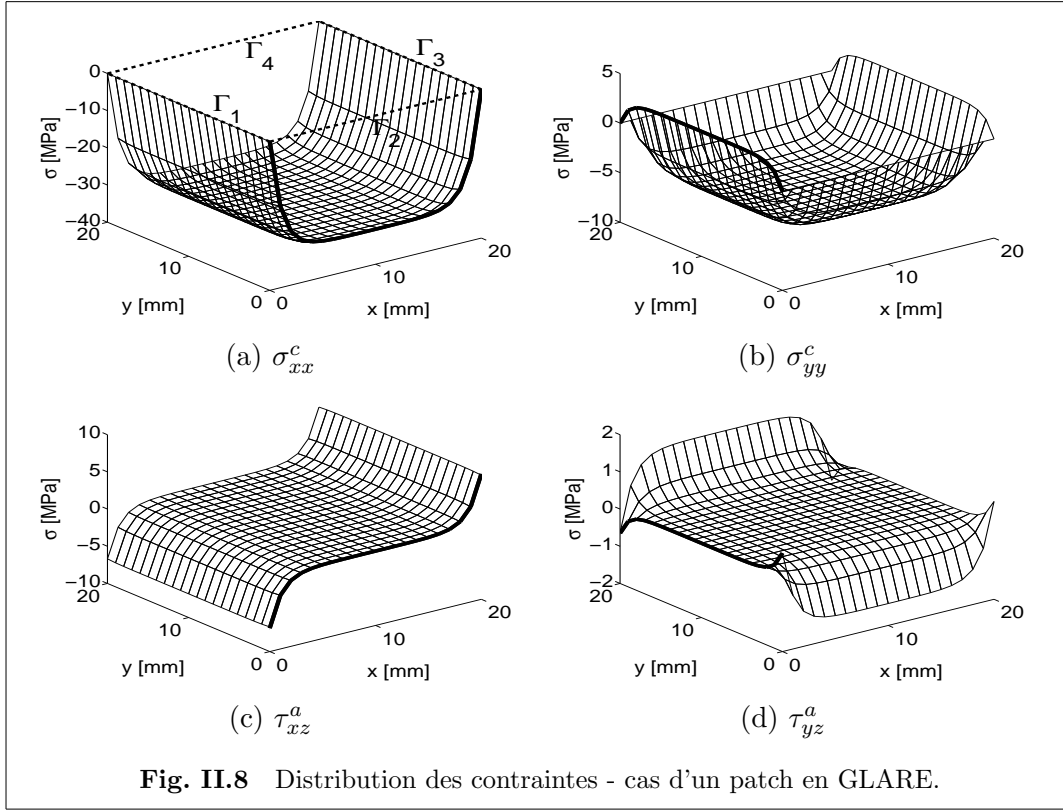
- dans le cas d'une baisse de température, le patch équivalent homogène est globalement en compression, cependant le calcul des contraintes dans chacun des plis montre que les plis orientés à 90° sont soumis à des contraintes de traction. Ceci s'explique par la différence des coefficients de dilatation des plis entre la direction des fibres et la direction transverse. Comme montré sur le schéma 1D de la figure II.6, l'aluminium et les plis à 90° ont tendance à se contracter, alors que les plis à 0° ne se déforment quasiment pas. Ceci induit des contraintes de traction dans l'aluminium et dans les plis à 90°. Cet état de traction suivant la direction transverse des plis provoque ici des contraintes pouvant atteindre 50% de la limite de résistance du patch. La défaillance de l'assemblage proviendrait donc ici plutôt de la rupture interlaminaire du patch que de la colle.

II.4.5 Cas d'un patch unidirectionnel bore/époxyde

Le cas d'un composite unidirectionnel en bore/époxyde est maintenant étudié. Ce matériau est parfois utilisé à l'étranger pour les applications de type renforcement de structures aéronautiques en raison de son coefficient de dilatation plus proche de celui de l'aluminium. Les fibres sont orientées selon la direction x . Les résultats sont présentés sur la figure II.7. Les remarques suivantes peuvent être formulées :

- dans ce cas, le patch est en compression suivant la direction x et en traction suivant la direction y . Ceci est dû à l'ordre des coefficients de dilatation : $\alpha_x < \alpha_s < \alpha_y$;
- la contrainte longitudinale suivant la direction y , en état de traction au niveau des frontières Γ_1 et Γ_3 , diminue de 50% au milieu du patch par rapport à la





solution 1D ;

- contrairement au cas du patch unidirectionnel en carbone/époxyde, les pics du cisaillement τ_{yz}^a dans la colle se situent dans les coins. Le cisaillement transverse dans la colle est plus élevé selon la direction des fibres et atteint 75% de la résistance en cisaillement ;
- le rapport entre les valeurs maximales des contraintes longitudinales dans le patch et les résistances correspondantes sont de 8.4% suivant la direction des fibres et de 19% suivant la direction transverse (cf. tableau II.2). Par contre, dans le cas d'une augmentation de température, les signes des contraintes obtenues sont inversés. Les résistances en traction ou en compression du patch étant différentes, les contraintes maximales atteignent cette fois 17% de la résistance du patch suivant la direction des fibres et 6% suivant la direction transverse.

II.4.6 Cas d'un patch en GLARE

Le cas d'un patch en GLARE est maintenant étudié. C'est un matériau composé de fines couches d'aluminium et de nappes unidirectionnelles de fibres de verre impré-

gnées de résine époxyde. Plusieurs variantes de GLARE ont été développées en jouant sur le nombre de couches utilisées, les alliages d'aluminium choisis ou les orientations des fibres. A titre d'exemple, un GLARE 2/1 est constitué de deux couches d'aluminium collées par une couche de préimprégné en fibres de verre. Des versions plus épaisses sont obtenues en empilant plus de couches pour former du 3/2, du 4/3... Les nuances de GLARE sont obtenues en jouant sur l'alliage d'aluminium ou les orientations des fibres. Le GLARE 2 est constitué de couches d'aluminium 2024 T3 de 0.2 à 0.5 mm d'épaisseur et d'une couche unidirectionnelle de fibres de verre de 0.25 mm d'épaisseur. Les nuances GLARE 3, GLARE 4 et les suivantes correspondent à des orientations différentes des fibres de verre [WY05]. La nuance de GLARE choisie ici est le GLARE 2 3/2, qui a donc un comportement orthotrope. Ses propriétés thermoélastiques sont relativement proches de celles de l'aluminium (cf. tableau II.1). Les résultats obtenus sont présentés sur la figure II.8. Les remarques suivantes peuvent être formulées :

- ce cas est similaire au précédent en ce qui concerne l'ordre des coefficients de dilatation ($\alpha_x < \alpha_s < \alpha_y$). Les solutions 1D donnent donc un état de compression dans le sens des fibres et un état de traction dans le sens transverse. Ce résultat est bien celui trouvé par le modèle 2D le long des bords libres ($\{\Gamma_2, \Gamma_4\}$ pour σ_{xx}^c et $\{\Gamma_1, \Gamma_3\}$ pour σ_{yy}^c), cependant l'effet 2D mène à un tout autre résultat au milieu du patch : σ_{yy}^c passe d'un état de traction le long de Γ_1 à un état de compression au milieu du patch. Le modèle 1D utilisé seul donnerait donc des résultats erronés car il ne prend pas en compte l'effet lié aux coefficients de Poisson ;
- le rapport entre les valeurs maximales des contraintes longitudinales dans le patch et les résistances correspondantes sont de 7.9% pour la compression suivant la direction x , de 2.6% pour la compression suivant la direction y et de 1.1% pour la traction suivant la direction y . Le cisaillement dans la colle atteint 16% de la résistance en cisaillement. Ces valeurs sont nettement inférieures à celles obtenues pour les autres patches traités. Le GLARE est donc moins sensible aux chargements thermiques du fait de son comportement thermoélastique très proche de celui de l'aluminium. Il faut toutefois noter qu'il est également moins rigide que les autres patches et renforce donc moins efficacement le substrat ;
- les résistances du GLARE en traction ou en compression étant relativement proches, les résultats obtenus pour un chargement de +100 °C sont quasiment identiques à ceux présentés ci-dessus.

II.5 Comparaison des résultats

Les résultats précédents en terme de résistance sont repris ici et étoffés. Des critères de rupture sont choisis et calculés pour chaque élément de l'assemblage, le patch composite d'abord puis l'aluminium et la colle, ceci afin de comparer les résultats obtenus pour les différents patchs traités en terme de résistance aux variations de température.

II.5.1 Critère de rupture du patch : critère de Tsai-Wu

Le patch composite étant un matériau orthotrope, le critère choisi pour évaluer sa tenue en résistance est le critère de Tsai-Wu [Ber05]. Dans le cas général, la rupture du matériau est atteinte si l'égalité suivante est vérifiée :

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_{ij} = 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{II.27})$$

où les constantes F_i et F_{ij} sont les composantes de deux tenseurs, respectivement de rang 2 et de rang 4, dépendants des limites de résistances du matériau en traction, en compression et en cisaillement suivant chacune des directions (cf. tableau II.2).

Le patch étant ici en contraintes planes dans le plan $(1, 2) = (L, T) = (x, y)$, seules les contraintes $\sigma_1 = \sigma_{xx}$, $\sigma_2 = \sigma_{yy}$ et $\sigma_6 = \sigma_{xy}$ sont conservées. La relation (II.27) se réduit donc à :

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (\text{II.28})$$

Les valeurs des F_i et F_{ij} sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{1}{X} - \frac{1}{X'} \\ F_2 = \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \\ F_6 = 0 \\ F_{11} = \frac{1}{XX'} \\ F_{22} = \frac{1}{YY'} \\ F_{66} = \frac{1}{S^2} \end{array} \right. \quad (\text{II.29})$$

Le coefficient de couplage F_{12} peut être déterminé lors d'un essai biaxial, par exemple en traction biaxiale en appliquant la même contrainte $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Ce

paramètre s'écrit alors en fonction de la contrainte à rupture σ de la manière suivante :

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[1 - \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X'} + \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \right) \sigma + \left(\frac{1}{XX'} + \frac{1}{YY'} \right) \sigma^2 \right] \quad (\text{II.30})$$

Il peut également être obtenu lors d'un essai de traction (ou compression) à 45° des axes principaux du matériau. Il s'écrit alors en fonction de σ_{45} , la contrainte mesurée lors de la rupture dans un tel essai :

$$F_{12} = \frac{2}{\sigma_{45}^2} \left[1 - \frac{\sigma_{45}}{2} \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X'} + \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \right) - \frac{\sigma_{45}^2}{2} \left(\frac{1}{XX'} + \frac{1}{YY'} + \frac{1}{S^2} \right) \right] \quad (\text{II.31})$$

En général, un coefficient de couplage empirique $F_{12}^* = XX'F_{12}$ est introduit et ajusté en fonction des résultats expérimentaux. Dans le cas où $F_{12}^* = -\frac{1}{2}$, selon le critère de Tsai-Wu il n'y a alors pas de rupture du patch si :

$$\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X'} \right) \sigma_{xx}^c + \left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \right) \sigma_{yy}^c + \frac{\sigma_{xx}^c{}^2}{XX'} + \frac{\sigma_{yy}^c{}^2}{YY'} + \frac{\sigma_{xy}^c{}^2}{S^2} - \frac{\sigma_{xx}^c \sigma_{yy}^c}{XX'} < 1 \quad (\text{II.32})$$

Ce critère est construit de manière empirique à partir de considérations géométriques et mécaniques qui permettent de déterminer la forme de la zone de stabilité à partir de résultats d'essais mécaniques simples. Celle-ci doit par exemple être fermée pour éviter d'avoir une résistance infinie et convexe pour qu'un déchargement à partir d'un état de contrainte stable n'amène pas à sortir de la zone dans laquelle le matériau garde son intégrité [LS98]. Une valeur supérieure à 1 indique que l'état de contrainte se situe dans la zone de rupture (cf. figure II.9) et une valeur inférieure à 1 correspond à la zone de non-rupture. En utilisant l'équation (II.32), la valeur obtenue pour $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} = \{0, 0, 0\}$ est 0. Il est cependant possible pour certains couples $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}\}$ d'obtenir des valeurs négatives. C'est en particulier le cas lorsque les résistances en traction (par exemple Y) et en compression (par exemple Y') sont différentes. Le critère de Tsai-Wu, le long de l'axe $\sigma_{xx} = 0$, passe alors de 1 en $\sigma_{yy} = -Y'$ ou Y à 0 en $\sigma_{yy} = 0$, ceci de manière parabolique. Il est donc évident que des valeurs négatives peuvent apparaître. Ces valeurs négatives correspondent à des états de contraintes plus éloignés de la zone de rupture que ne l'est le point $\{0, 0\}$. Il existe également des critères modifiés, basés sur la même frontière extérieure mais imposant un minimum en $\{0, 0\}$ [Kol03].

Les résultats obtenus pour chacun des patches sont présentés sur la figure II.10. Les calculs sont conduits à partir des contraintes σ_{xx}^c et σ_{yy}^c présentées dans les cas étudiés précédemment. Le cas particulier du patch croisé $[0, 90]_s$ est traité différemment puisque les contraintes ne sont pas les mêmes dans chacun des plis. Le critère

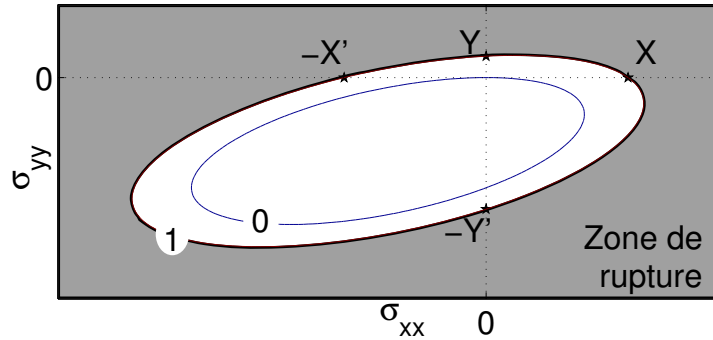


Fig. II.9 Lignes de niveau du critère de Tsai-Wu pour le patch unidirectionnel en carbone/époxyde pour $\sigma_{xy} = 0$.

de Tsai-Wu est alors calculé dans chaque pli, mais comme le problème est identique suivant x et y , les résultats dans chacun des plis sont égaux. Seul le pli à 0° est donc représenté sur la figure.

Les critères de Tsai-Wu sont calculés dans le cas d'une variation de température de -100°C , ce qui correspond au retour à température ambiante après le collage du patch composite. Comme les résistances à la traction et à la compression des différents patchs ne sont pas identiques (cf. tableau II.2), le cas d'une variation de $+100^\circ\text{C}$ est également traité afin d'évaluer l'impact d'une variation de température positive. Comme le modèle de calcul est élastique, les champs de contraintes obtenus pour une variation de $+100^\circ\text{C}$ sont les opposés de ceux obtenus pour une variation de -100°C .

Il faut noter encore une fois que ces calculs sont menés en émettant l'hypothèse que les paramètres des différents matériaux sont constants sur l'intervalle de température considéré. Cette hypothèse est évidemment discutable, en particulier pour la colle, mais seul l'aspect qualitatif de l'étude est retenu ici, l'objectif étant de comparer la résistance des différents assemblages à une sollicitation thermique. La non-linéarité du comportement de la colle est traitée aux chapitres III et IV. Les remarques suivantes peuvent être formulées :

- les résultats obtenus sont clairement différents pour une diminution ou une augmentation de température, les contraintes dans le patch passant d'un état de compression à un état de traction ou inversement. Un chargement thermique menant à des contraintes de traction est toujours plus pénalisant. Il n'y a cependant pas de règle générale sur le cas le plus défavorable. En effet, une

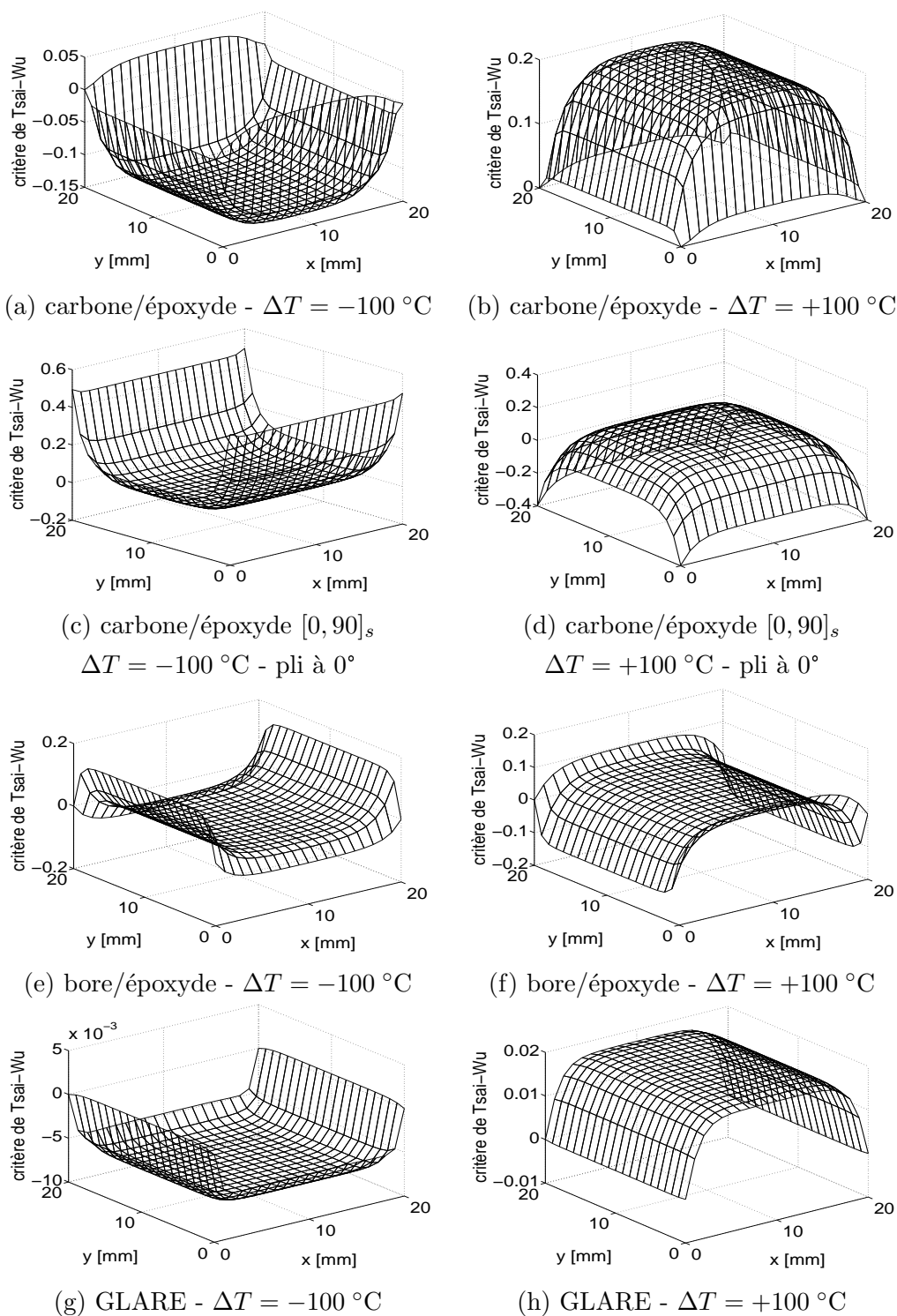


Fig. II.10 Critères de Tsai-Wu calculés pour chacun des patchs étudiés : l'unidirectionnel carbone/époxyde (a-b), le croisé $[0, 90]_s$ carbone/époxyde (c-d), l'unidirectionnel bore/époxyde (e-f), le GLARE (g-h).

- variation positive de température est plus pénalisante pour un patch en carbone/époxyde unidirectionnel ou en GLARE qu'une variation négative, mais c'est l'inverse pour le patch en bore/époxyde unidirectionnel ou le patch croisé en carbone/époxyde ;
- le maximum du critère de Tsai-Wu n'est pas toujours localisé au même endroit, il peut être au milieu du patch ou sur un bord. Il est cependant toujours inférieur à 1 donc aucun des cas présentés n'est dans la zone de défaillance pour la partie composite ;
 - les valeurs les plus élevées sont obtenues pour le patch croisé en carbone/époxyde, en particulier lors d'une baisse de température (cf. figure II.10(c)). Dans ce cas, La contrainte moyenne sur l'épaisseur du patch est globalement en compression, mais lorsqu'elle est décomposée sur chaque pli (cf. figure II.5(e-h)), ils sont soumis à de la traction suivant la direction transverse aux fibres, ce qui est particulièrement endommageant ;
 - le GLARE donne les résultats les plus faibles, ceci grâce à des propriétés thermoélastiques très proches de l'aluminium. Cependant, il ne renforce pas autant que les autres types de patches.

II.5.2 Critère de rupture de la colle et de l'aluminium : critère de Von Mises

La colle et l'aluminium étant des matériaux isotropes, le critère de Von Mises peut suffire pour évaluer s'il y a rupture ou non. Il s'écrit de la manière suivante :

$$\left(\sigma_{xx}^s - \sigma_{yy}^s\right)^2 + \sigma_{xx}^{s2} + \sigma_{yy}^{s2} + 6\left(\sigma_{xz}^{s2} + \sigma_{yz}^{s2}\right) \leq 2\sigma_e^2 \quad (\text{II.33})$$

où σ_e représente la contrainte limite en traction dans le matériau considéré. Le rapport du terme de gauche sur celui de droite est utilisé pour mesurer le degré de chargement atteint dans chacun des cas. Une valeur supérieure à 1 mène à la rupture du matériau. La valeur obtenue peut être comparée au critère de Tsai-Wu évalué dans le composite.

La contrainte limite en traction σ_e de la colle est déterminée à partir de la contrainte limite en cisaillement τ_e , donnée dans le tableau II.2, à l'aide de la relation suivante :

$$\sigma_e = \tau_e \sqrt{3} \quad (\text{II.34})$$

Comme la résistance au cisaillement τ_e prend des valeurs très différentes en fonction de la température (cf. tableau II.2), les résultats obtenus pour le critère de Von Mises

varient également beaucoup. Trois valeurs de σ_e ont donc été testées : d'abord les valeurs extrêmes données par le fournisseur (17 MPa à 100 °C et 42 MPa à 22 °C), puis une troisième valeur obtenue expérimentalement à température ambiante [PBGR08] (90 MPa). Cette dernière valeur a été déduite en considérant le pic de contrainte au niveau du bord libre au moment de la rupture alors que les données fournisseur correspondent sans doute à des essais normalisés où le cisaillement est moyenné sur la surface de recouvrement. Cette dernière valeur, 90 MPa, est donc nettement plus élevée que celles du fournisseur, il y a donc probablement une marge de sécurité importante lorsque le pic de cisaillement évalué ici est comparé aux résistances fournies par Hexcel.

Les résultats obtenus dans la colle et l'aluminium sont présentés sur la figure II.11. Comme les contraintes limites en traction ou en compression des matériaux considérés sont les mêmes, seules sont représentées les valeurs obtenues pour une variation de -100 °C. Les résultats présentés pour la colle sont obtenus pour une résistance limite de 42 MPa, c'est à dire la valeur donnée par le constructeur à température ambiante. Cela correspond bien au cas où l'assemblage, collé à 120 °C, redescend à température ambiante. Les valeurs les plus élevées pour la colle sont obtenues sur les bords, là où les pics de cisaillement sont situés. Au contraire, les contraintes sont nulles dans l'aluminium au niveau des bords libres mais maximales au centre de la zone renforcée, c'est donc au centre que le risque de rupture est le plus grand. Le risque de rupture de l'aluminium reste cependant toujours très inférieur à celui trouvé dans la colle.

II.5.3 Bilan comparatif

Les valeurs maximales des critères de rupture dans chacun des éléments de l'assemblage collé sont résumées sur la figure II.12. Trois valeurs sont présentées pour le calcul dans la colle, il s'agit des trois cas présentés précédemment.

Les valeurs de résistance de la colle données par le fournisseur donnent les résultats les plus mauvais, les critères sont souvent bien supérieurs à 1 sauf dans le cas d'un patch en GLARE qui est très peu sollicité lors d'un chargement thermique. Les critères obtenus en supposant une résistance au cisaillement de 90 MPa pour la colle donnent des valeurs plus faibles, parfois inférieures au critère de Tsai-Wu dans le patch.

Le cas le plus défavorable est celui d'un patch croisé en carbone/époxyde lors d'une variation de température négative. Ceci est dû à la contrainte de traction élevée selon la direction transverse des fibres par rapport à la résistance correspondante du

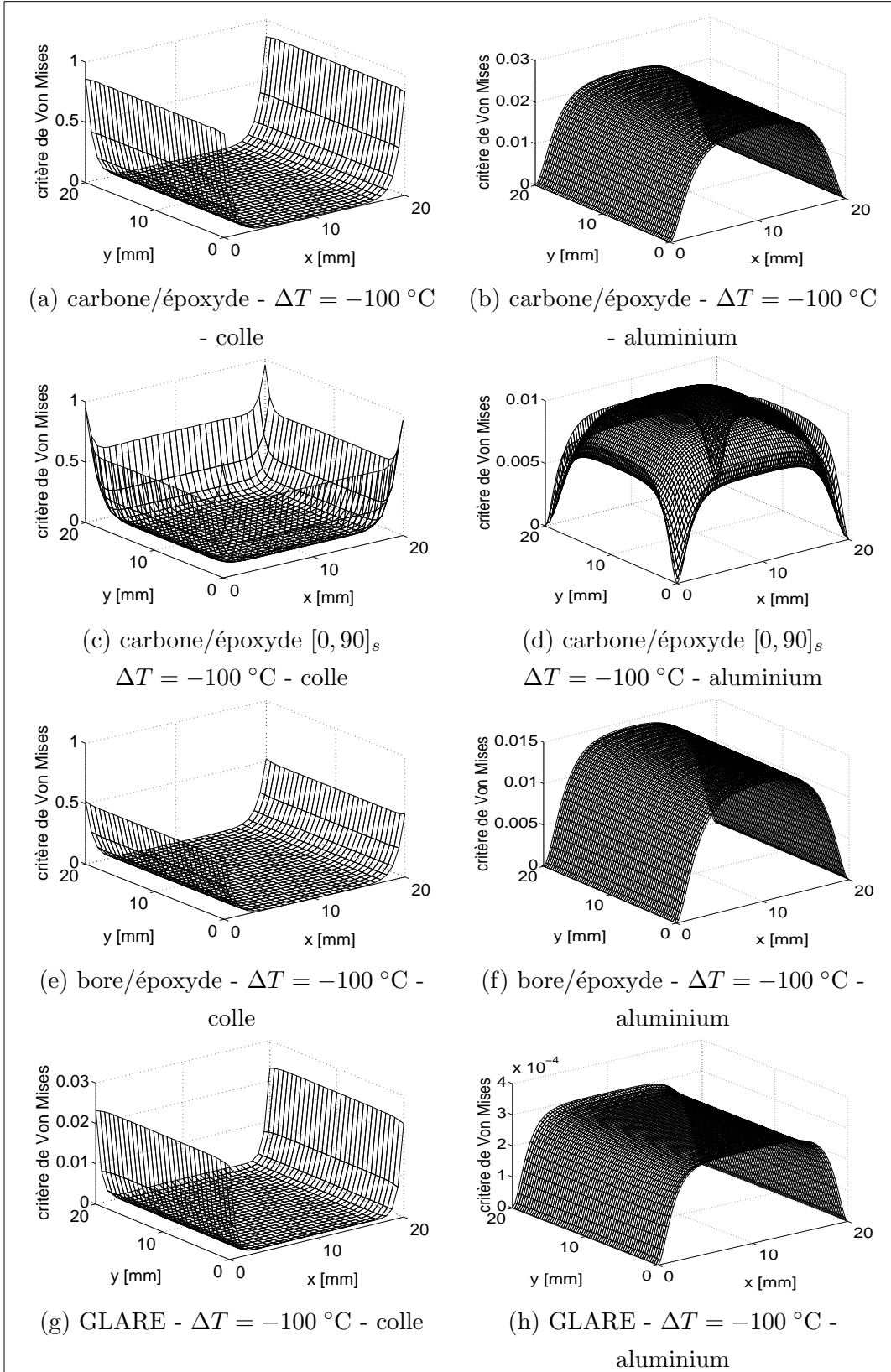
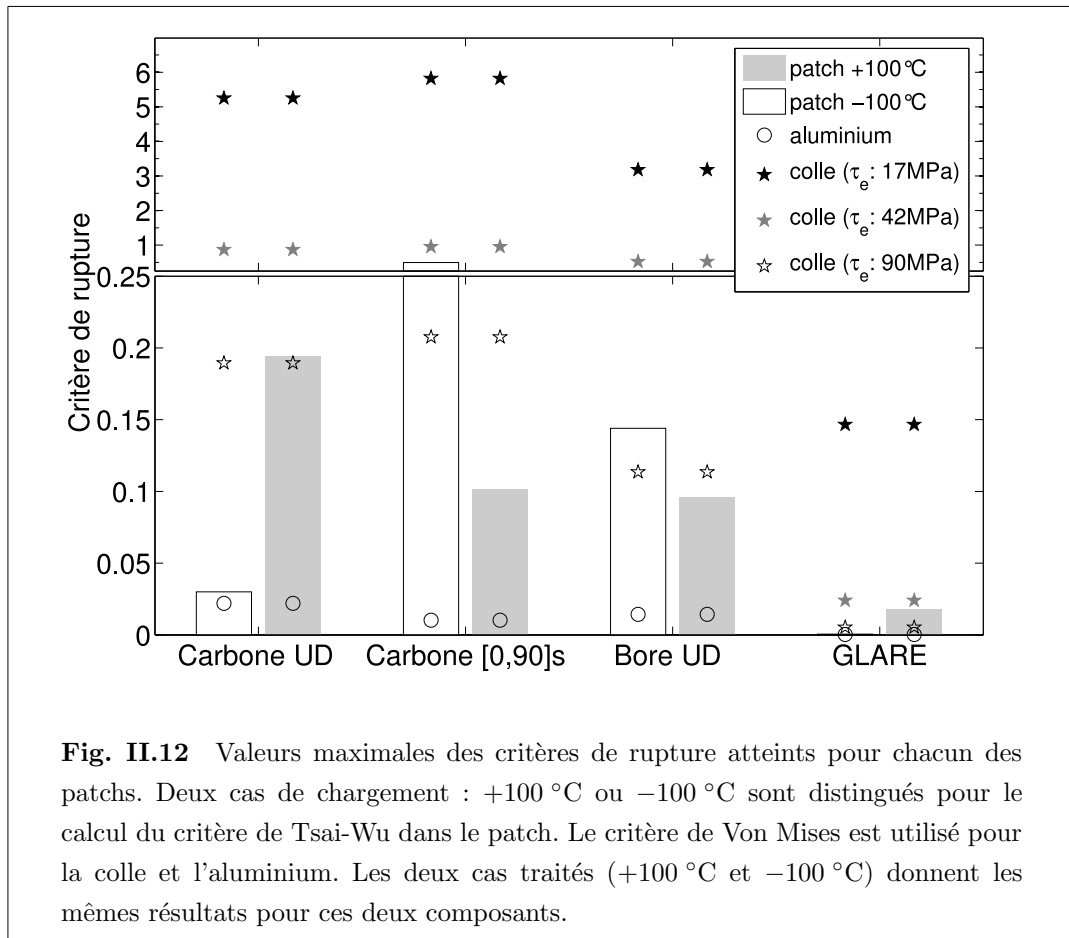


Fig. II.11 Critères de Von Mises calculés pour chacun des patchs étudiés dans la colle puis dans l'aluminium : l'unidirectionnel carbone/époxyde (a-b), le croisé $[0, 90]_s$ carbone/époxyde (c-d), l'unidirectionnel bore/époxyde (e-f), le GLARE (g-h).



patch. Le cas le moins contraignant, aussi bien pour le patch que pour la colle, est celui du patch en GLARE, dont les propriétés thermoélastiques sont les plus proches de l'aluminium.

Il ne faut cependant pas oublier qu'il ne s'agit que de l'étude de la résistance de l'assemblage collé à un chargement thermique. Pour une étude complète, il faut ajouter aux résultats obtenus les contraintes résultant du chargement mécanique qui peuvent s'ajouter ou se retrancher aux contraintes thermiques. Un patch en GLARE induit moins de contraintes thermiques, mais soulage moins le substrat qu'un patch en fibres de carbone lors d'un chargement mécanique. Il est donc essentiel d'étudier les deux aspects, mécanique et thermique, du problème. De plus, ces résultats ne sont que qualitatifs étant donné que sur une grande plage de variation de la température, les propriétés thermoélastiques et les résistances des différents éléments ne sont pas constantes. Ce tableau permet donc simplement de synthétiser les différents cas de figure possibles, ceci en comparant qualitativement la résistance de quelques patches utilisés pour le renforcement et en mettant en évidence pour chaque cas l'élément le plus critique de l'assemblage.

Comme attendu, la défaillance provient plutôt de la colle, mais dans certains cas elle peut être causée par une rupture du patch. Il faut cependant garder à l'esprit que les propriétés de la colle sont mal connues, et l'hypothèse qui est émise sur le caractère constant des paramètres matériaux est très discutable.

II.6 Conclusion

Une solution analytique bidimensionnelle a été développée pour l'évaluation des contraintes d'origine thermique dans un assemblage collé de forme rectangulaire. La solution a été obtenue à l'aide de séries de Fourier. Les quelques exemples traités montrent clairement des effets de couplage entre les deux directions de la structure collée et l'allure des résultats peut prendre des profils bien différents en fonction des paramètres des matériaux (coefficients de dilatation, modules d'Young et coefficients de Poisson suivant chacune des directions). La solution 2D développée ici peut être vue comme le passage progressif d'une solution 1D le long des bords libres vers une solution 2D au milieu du patch. Dans la plupart des cas, une solution unidimensionnelle ne suffit pas pour décrire proprement la distribution des contraintes dans le patch et dans la colle.

L'étude des critères de rupture dans chacun des éléments de l'assemblage collé

montre que la défaillance de l'assemblage proviendrait plutôt de la colle, mais pourrait également être causée par une rupture d'un des plis du patch. Evidemment, des hypothèses simplificatrices ont été émises pour aboutir à ces résultats, qui ne sont donc valables que si le patch présente une épaisseur constante et si les propriétés des matériaux n'évoluent pas pendant le chargement. Le premier point est critiquable dans le sens où, en pratique, lors du collage d'un patch composite sur une structure aéronautique, l'épaisseur du patch est diminuée progressivement près des bords pour abaisser le pic de contrainte dans la colle. Le calcul présenté ici est alors plus contraignant et permet d'évaluer une borne supérieure des contraintes effectivement présentes dans l'assemblage. Concernant la stabilité des paramètres matériaux, si cette hypothèse est généralement satisfaisante pour les propriétés de l'aluminium et du patch, elle ne l'est en revanche pas du tout pour la colle, dont les propriétés évoluent très fortement en fonction de la température et au cours du temps.

La suite du travail consiste à caractériser le comportement non-linéaire de la colle utilisée, la Redux 312, puis à développer un modèle de calcul permettant d'utiliser une loi de comportement thermo-viscoélastique.

Chapitre III

Caractérisation du comportement de la colle Redux 312

Ce chapitre est consacré à la caractérisation du comportement thermo-viscoélastique de la colle Redux 312. Des tests de relaxation et une méthode d'optimisation appropriée ont permis d'obtenir un jeu de paramètres adéquat pour l'utilisation de la loi de comportement dans le modèle de calcul présenté au chapitre IV.

Sommaire

III.1	Introduction	69
III.2	Essais de caractérisation	69
III.2.1	Introduction	69
III.2.2	Fabrication des éprouvettes massives de colle	70
III.2.3	Essai de DSC	72
III.2.4	Essai dynamique	73
III.2.5	Essais de relaxation	76
III.3	Identification des paramètres viscoélastiques	80
III.3.1	Objectif	80
III.3.2	Présentation des méthodes existantes	81
III.3.3	Méthode retenue	92
III.4	Conclusion	95

III.1 Introduction

COMME montré au chapitre II, le principal point faible des assemblages collés provient généralement de la couche de colle qui est soumise à de fortes contraintes de cisaillement. De nombreux modèles permettent d'évaluer, sous certaines hypothèses, le pic de cisaillement dans la colle (cf. chapitre I), mais la loi de comportement de ce matériau se restreint généralement à une simple loi élastique linéaire.

Une structure aéronautique peut être soumise en pratique à des températures variant de $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$ en vol à $+70\text{ }^{\circ}\text{C}$ au sol. Elles peuvent même monter à $+200\text{ }^{\circ}\text{C}$ lors d'un vol supersonique [DSA05]. Or des études ont montré que, pour ces températures, les colles classiquement utilisées (FM 73, REDUX 312) présentent une loi de comportement viscoélastique [CJ95, PW82]. De plus, ce comportement viscoélastique de la colle varie en fonction de la température [PW83]. Il est donc essentiel de connaître avec précision cette loi de comportement en fonction du temps et de la température pour évaluer au mieux l'évolution des contraintes dans la colle lors de l'assemblage des matériaux, puis au cours de la durée de vie de la structure collée.

Il existe actuellement très peu d'informations sur le comportement précis de la Redux 312 et des colles en général en ce qui concerne l'influence du temps et de la température. Des essais de caractérisation sont donc présentés dans ce chapitre, puis diverses méthodes sont utilisées pour exploiter au mieux les résultats afin d'obtenir une loi de comportement thermo-viscoélastique. Le modèle ainsi obtenu sera utilisé au chapitre IV pour évaluer l'impact d'un chargement thermique sur une structure collée en se basant sur un modèle réaliste du comportement de la colle.

III.2 Essais de caractérisation

III.2.1 Introduction

La connaissance du comportement de la colle Redux 312 passe par la caractérisation de plusieurs paramètres. La température de transition vitreuse permet de

déterminer la plage d'utilisation de la colle. Cette température est déterminée ici de deux manières, d'abord par calorimétrie différentielle puis par un essai dynamique sur une éprouvette massive de colle mené entre $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $+200\text{ }^{\circ}\text{C}$. Des essais de relaxation sont ensuite pratiqués sur des éprouvettes de Redux 312.

Comme la colle est fournie sous forme de films non polymérisés de $150\text{ }\mu\text{m}$ d'épaisseur, la première étape de ces essais consiste à préparer des éprouvettes de dimensions suffisantes pour être testées dans un rhéomètre. Il n'est en effet pas possible de tester les films de colle en l'état et l'objectif est ici de caractériser le comportement de la colle seule et non d'un assemblage collé. En effet, les essais normalisés classiques utilisant des assemblages collés semblent inadaptés pour la caractérisation de la colle car il sont soumis à trop d'éléments géométriques fluctuants, comme par exemple l'épaisseur du joint de colle entre les éléments assemblés. De plus l'objectif est de caractériser la relaxation de la colle à différentes températures au fil du temps. Les appareils disponibles pour ce type de mesure, rhéomètre ou viscoanalyseur, ne permettent que de tester de petits échantillons de quelques centimètres au maximum, ce qui rendrait difficile la fabrication d'une éprouvette type structure collée.

III.2.2 Fabrication des éprouvettes massives de colle

La fabrication d'éprouvettes massives est une étape délicate. Plusieurs couches de colle sont superposées pour obtenir une éprouvette d'épaisseur souhaitée. La principale difficulté est d'éviter la formation de bulles d'air au sein de l'éprouvette réalisée. Cette question a été traitée en détail dans [dSAG04] où plusieurs méthodes permettant de produire des éprouvettes sans porosité sont présentées, comme la technique décrite dans la norme NF T 76-142 (cf. figure III.1(a)) ou la "open vacuum release technique" (cf. figure III.1(b)). Ces deux techniques permettent de produire des éprouvettes massives à partir de films de colle.

La méthode choisie pour ce travail est adaptée de la "open vacuum release technique". L'éprouvette est obtenue en assemblant plusieurs couches de Redux 312. Un moule spécifique est utilisé. Ses dimensions sont les suivantes : 15 mm de large, 45 mm de long et 2 mm d'épaisseur. Plusieurs couches de colle de $40 \times 10\text{ mm}^2$ sont empilées et positionnées dans le moule. Le volume global de colle est légèrement supérieur au volume disponible et l'épaisseur est légèrement inférieure à la surface du moule pour permettre un écoulement de la colle quand la température augmente.

Les cycles de température et de pression imposés à l'échantillon sont présentés sur la figure III.2. Lors de la première étape, la colle est dégazée sous vide à une

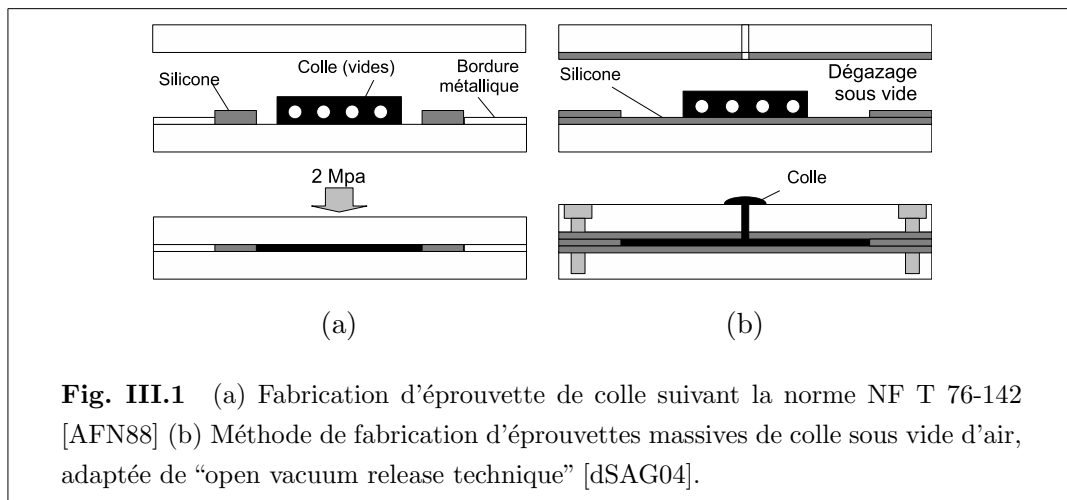


Fig. III.1 (a) Fabrication d'éprouvette de colle suivant la norme NF T 76-142 [AFN88] (b) Méthode de fabrication d'éprouvettes massives de colle sous vide d'air, adaptée de "open vacuum release technique" [dSAG04].

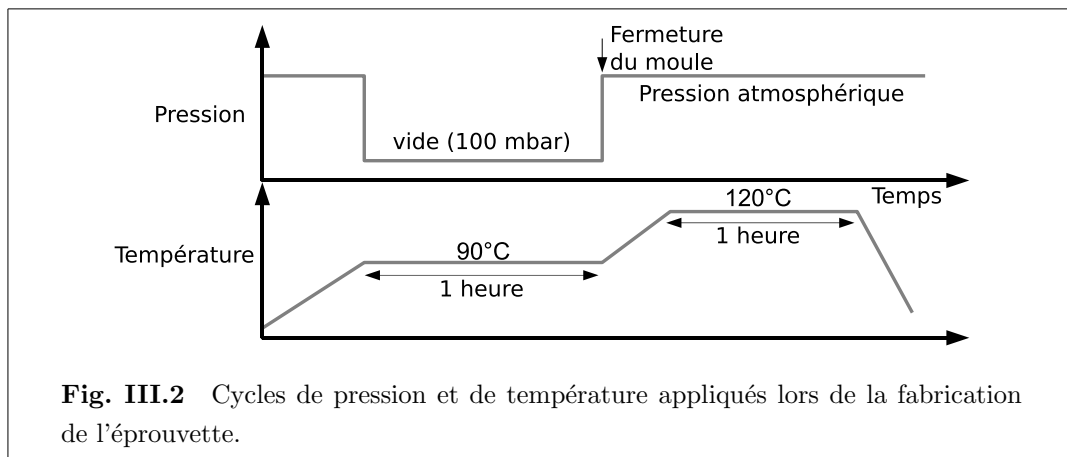


Fig. III.2 Cycles de pression et de température appliqués lors de la fabrication de l'éprouvette.

température pour laquelle elle peut s'écouler sans polymériser trop rapidement (90 °C environ). Lors de la seconde étape, à pression atmosphérique normale cette fois, la partie supérieure du moule est mise en place et la température est réglée à la température de polymérisation conseillée par le fournisseur : 120 °C pendant une heure. Le surplus de colle est évacué par une ouverture sur le dessus du moule. Les éprouvettes obtenues sont ensuite poncées pour obtenir les dimensions souhaitées : $10 \times 40 \times 1 \text{ mm}^3$. Quelques unes des éprouvettes obtenues sont représentées sur la figure III.3.

Une autre méthode a également été testée dans l'optique de faciliter la fabrication d'éprouvettes massives. La polymérisation *in situ* d'un échantillon cylindrique de colle entre deux mors du rhéomètre permet en effet de simplifier la fabrication, cependant la rigidité de l'éprouvette ainsi obtenue est trop grande par rapport aux capacités de

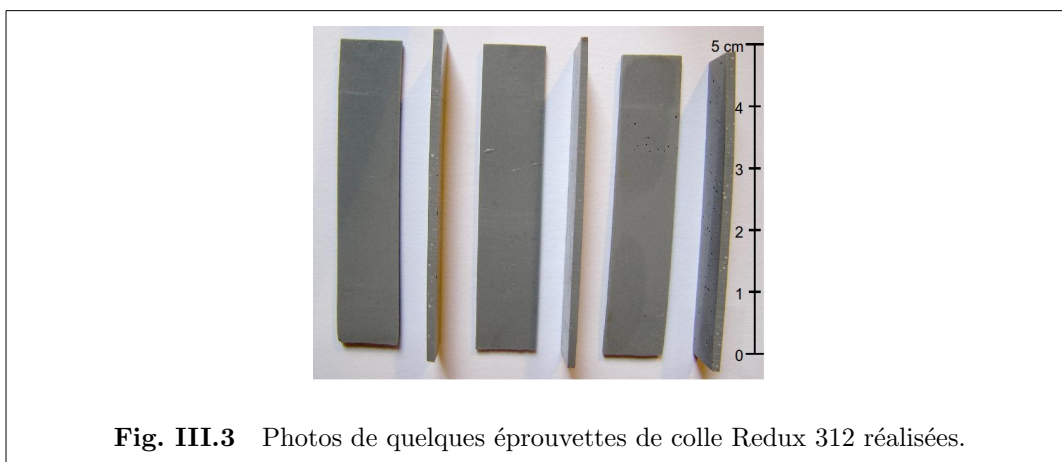


Fig. III.3 Photos de quelques éprouvettes de colle Redux 312 réalisées.

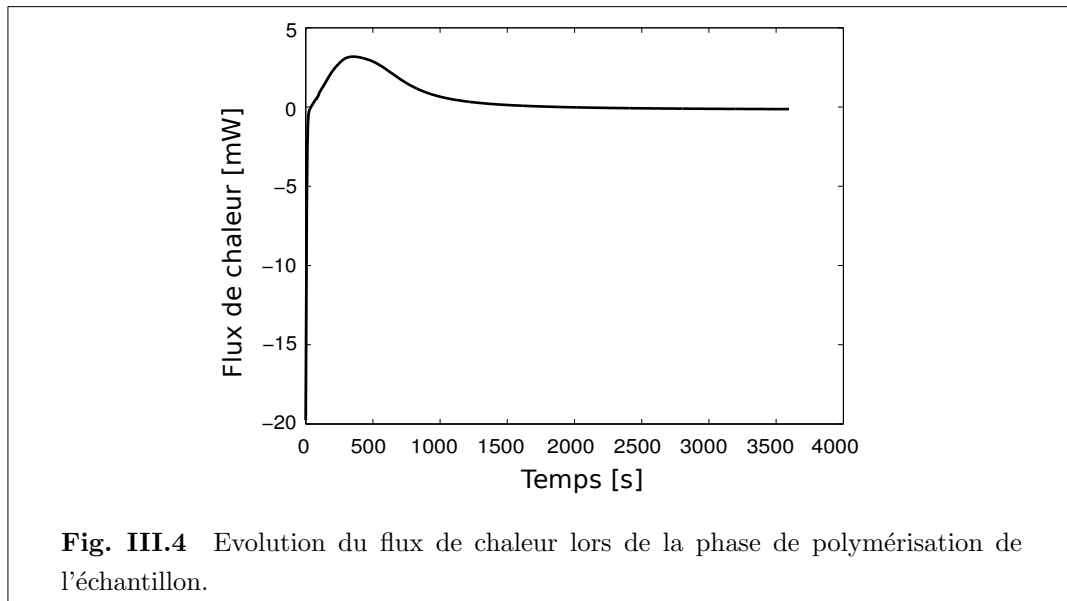
l'appareil. Les éprouvettes rectangulaires ont donc finalement été retenues pour les essais dynamiques et de relaxation présentés dans la suite.

III.2.3 Essai de Calorimétrie différentielle à balayage ou “Differential Scanning Calorimetry” (DSC)

La calorimétrie différentielle à balayage est une méthode de caractérisation des matériaux. Elle mesure les différences des échanges de chaleur entre un échantillon à analyser et une référence. Elle permet, entre autre, de déterminer la température de transition vitreuse T_g des polymères, les températures de fusion et de cristallisation, ainsi que les enthalpies de réaction pour connaître en particulier les taux de réticulation des polymères. Les analyses sont réalisées sous balayage d'un gaz inerte (par exemple l'argon ou l'azote) pour éviter toute réaction du matériau avec l'atmosphère du four.

Pour cet essai, l'échantillon de départ est un carré de 10 mg environ prélevé sur un film de Redux 312 non polymérisée. La première étape de l'essai consiste à chauffer l'échantillon pendant une heure à 120 °C puis à revenir à température ambiante, ce qui correspond au cycle de température imposé lors du collage d'un patch. L'évolution du flux de chaleur pendant cette phase est présenté sur la figure III.4. Le flux de chaleur n'évolue plus au-delà de 1500 s, la polymérisation semble donc complète.

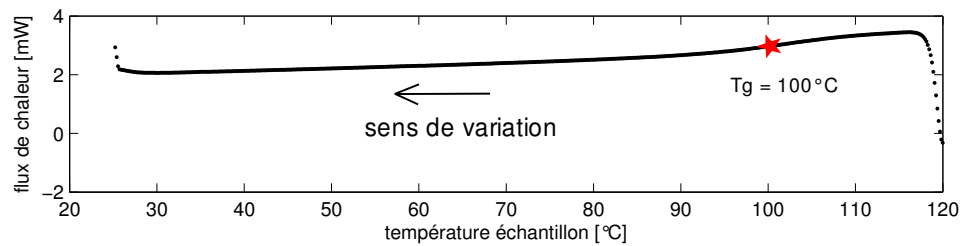
L'échantillon polymérisé est ensuite refroidi à température ambiante, puis porté à 200 °C et ramené à température ambiante. La vitesse de variation de la température est fixée à 10 °C/min. L'évolution du flux de chaleur lors de ces balayages en température est présentée sur la figure III.5. Les courbes présentées correspondent aux



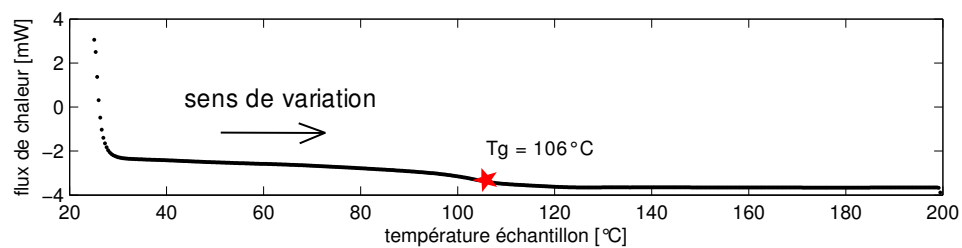
trois balayages en température. La méthode des tangentes, illustrée sur la figure III.6 permet de déterminer la température de transition vitreuse de la colle, située aux alentours de 105 °C.

III.2.4 Essai dynamique

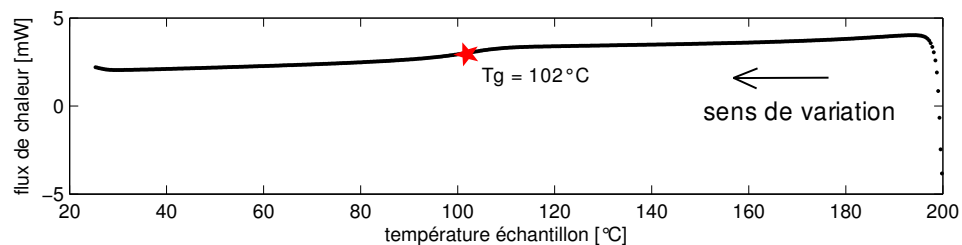
Un essai dynamique a aussi été mené pour suivre l'évolution du module de cisaillement G_a de la colle sur la plage de températures de l'étude. L'appareil utilisé est un spectromètre mécanique dynamique ARES TA Instruments. La mesure du couple est effectuée à l'aide d'un capteur 2kFRT pouvant être utilisé sur deux gammes de valeurs : de 200 à 2000 g.cm ou de 0.02 à 200 g.cm. Une éprouvette rectangulaire a été soumise à une déformation dynamique $\gamma = \gamma_0 \sin(\omega_0 t)$. La fréquence de l'oscillation a été fixée à 1 rad.s⁻¹. Le choix de cette fréquence a évidemment une influence sur le résultat obtenu, cependant il ne s'agit pas ici de conduire une étude complète fréquence/température mais d'obtenir l'allure de l'évolution du module sur une large gamme de températures. Au cours de l'essai, la température a balayé la gamme [-50, +150] °C. Comme l'échantillon se dilate avec la température, la distance entre les mors a été adaptée manuellement au cours de l'essai pour que l'effort normal imposé à l'éprouvette reste proche de zéro. La déformation maximale imposée γ_0 a également été adaptée au cours de l'essai pour que le couple mesuré reste entre le minimum mesurable et le maximum recommandé pour le capteur utilisé. Le montage



(a) balayage de 120 °C à 25 °C



(b) balayage de 25 °C à 200 °C



(c) balayage de 200 °C à 25 °C

Fig. III.5 L'évolution du flux de chaleur mesuré lors d'un essai de DSC, pour plusieurs balayages de température, permet de déterminer la température de transition vitreuse T_g par la méthode des tangentes aux alentours de 105 °C.

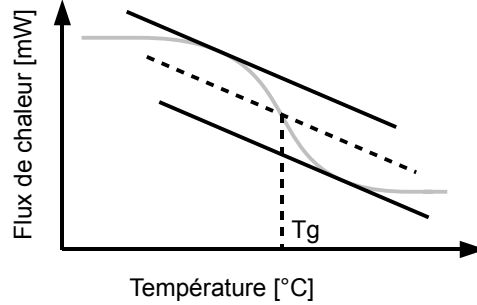


Fig. III.6 Illustration de la méthode des tangentes pour la recherche de la température de transition vitreuse T_g . Le T_g est relevé au point d'intersection entre la courbe et la droite passant au milieu des deux tangentes à la courbe aux points d'inflexion.

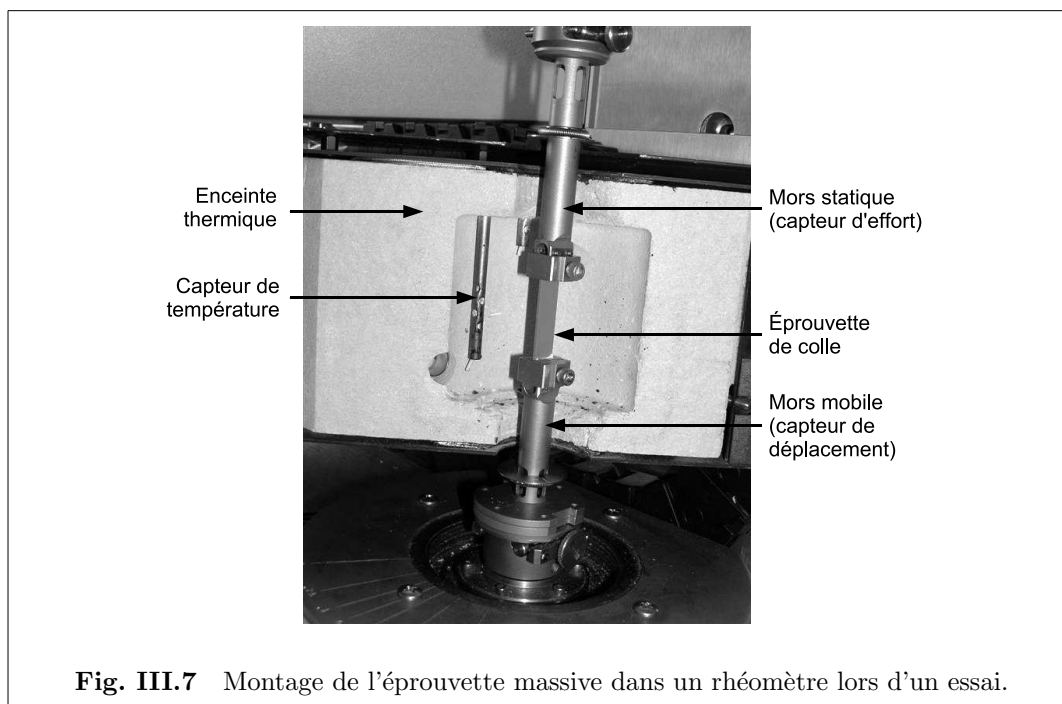
est présenté sur la figure III.7.

Les résultats obtenus lors de ce balayage en température sont présentés sur la figure III.8 pour une échelle verticale linéaire ou logarithmique. Le module complexe G mesuré se compose d'une partie réelle G' et d'une partie imaginaire G'' . G' est le module élastique ou module de conservation, en phase avec la déformation. Il représente l'énergie stockée dans l'échantillon sous forme élastique. G'' est le module visqueux ou module de perte, en déphasage par rapport à la déformation, il représente l'énergie dissipée dans le système sous forme de chaleur. Le calcul de la phase entre ces deux grandeurs permet de tracer $\tan(\delta)$, définie par :

$$\tan(\delta) = \frac{G''}{G'} \quad (\text{III.1})$$

δ est l'angle de perte, $\tan(\delta)$ représente la perte d'énergie associée au caractère viscoélastique du matériau et donc à l'ampleur du déphasage. Plus $\tan(\delta)$ est élevée, plus le caractère viscoélastique est accentué [Leb04]. Trois zones peuvent être distinguées sur les courbes : en dessous de -25°C et au dessus de 75°C , le caractère viscoélastique semble plus prononcé qu'entre ces deux températures.

La transition entre l'état vitreux et l'état caoutchoutique est marquée par une chute brutale du module réel G' et par un pic de $\tan(\delta)$. Cette transition, nommée transition α est associée à des déplacements à grande échelle des chaînes polymères. Le passage de la température de transition vitreuse T_g est ainsi repéré aux alentours de 115°C , ce qui est cohérent avec l'essai DSC présenté dans le paragraphe précédent. Une transition secondaire, ou transition β , apparaît à une température plus faible,



aux alentours de $-35\text{ }^{\circ}\text{C}$. Elle est due à des mouvements locaux des chaînes polymères au niveau moléculaire. Cette transition se traduit ici par un raidissement du module élastique G' ainsi que par une augmentation du caractère viscoélastique du matériau.

III.2.5 Essais de relaxation

Un essai dynamique ne permet que de mesurer le déphasage entre le module réel G' et le module imaginaire G'' à une fréquence donnée. Or la finalité de cette étude expérimentale est de disposer d'un modèle permettant de connaître l'évolution du module de cisaillement de la colle au fil du temps pour les températures situées entre $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $+70\text{ }^{\circ}\text{C}$. En complément aux résultats obtenus en dynamique, des essais de relaxation ont donc été menés sur des éprouvettes rectangulaires de Redux 312, ceci pour cinq températures réparties entre ces deux températures.

Une déformation angulaire est imposée à l'éprouvette, et le couple résultant est mesuré pendant plusieurs heures, permettant ainsi de calculer le module de cisaillement au fil du temps. Plusieurs éprouvettes ont été testées à chaque température et les modules moyens obtenus sont représentés sur la figure III.9. A titre d'information, les courbes obtenues pour trois éprouvettes testées à $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ sont représentées sur la figure III.10. Un écart de $\pm 50\text{ MPa}$ est constaté à cette température, soit de l'ordre

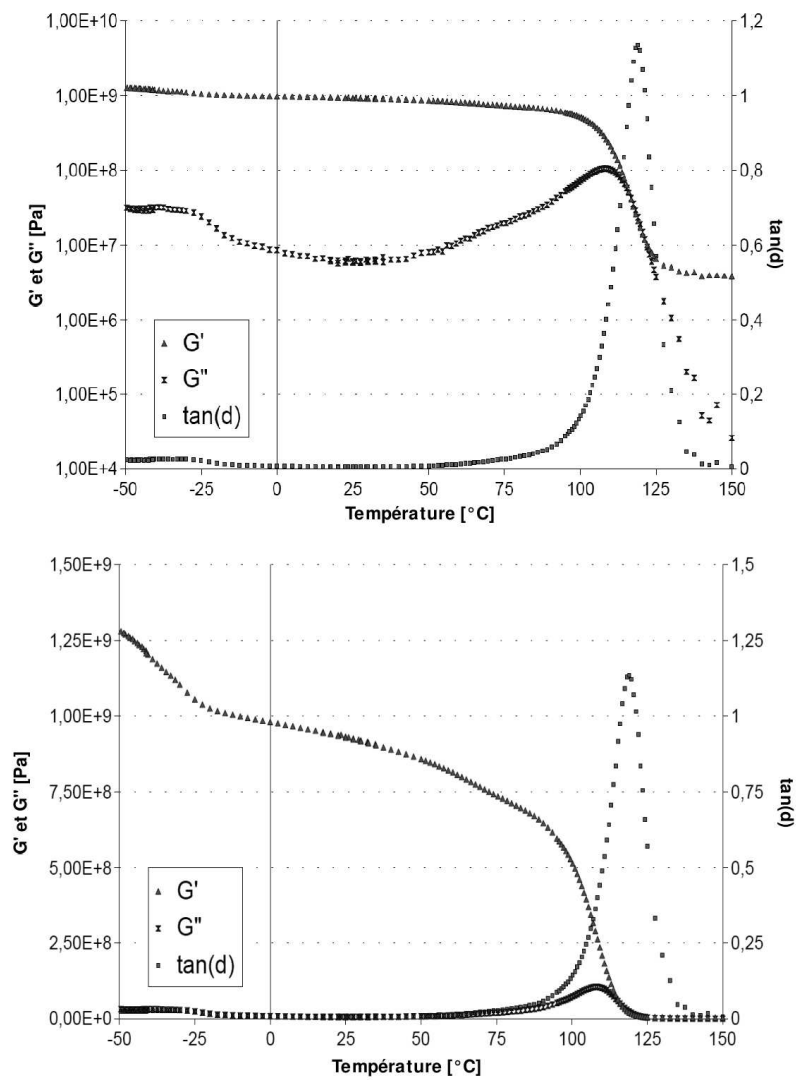


Fig. III.8 Module de cisaillement dynamique de la Redux 312 entre -50 et $+70$ °C, représenté avec une échelle logarithmique puis linéaire.

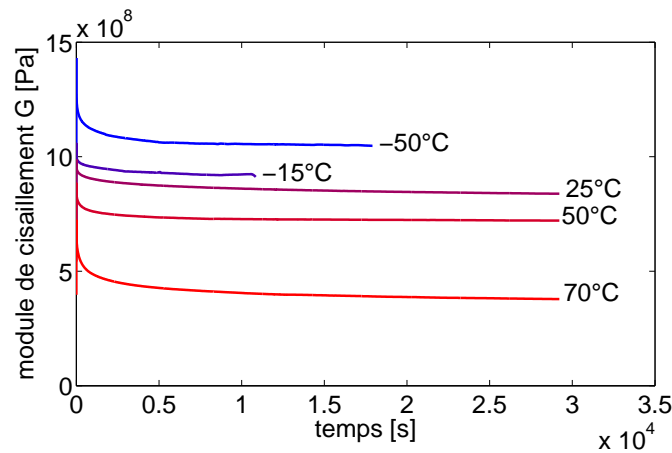


Fig. III.9 Relaxation du module de cisaillement moyen au cours du temps pour cinq températures.

de 10% de la valeur du module. Ceci est dû en particulier à la difficulté d'obtenir des échantillons massifs de colle sans bulles d'air. Peu d'échantillons ont donc finalement pu être testés. Les essais à 25 °C, 50 °C et 70 °C ont été menés pendant 8 heures environ. Pour ceux nécessitant l'utilisation d'azote liquide, les essais ont été menés jusqu'à l'épuisement de la réserve, soit environ quatre heures.

L'allure des courbes de relaxation obtenues permet de retrouver certains aspects de l'essai dynamique. Le module de cisaillement est relativement stable entre -15 °C et 25 °C, alors que la chute de module au-delà de 50 °C est perceptible bien que la transition ne soit pas terminée. Le raidissement de la colle en dessous de -15 °C se retrouve également.

La figure III.11 représente l'évolution du rapport entre les modules viscoélastique et élastique de la Redux 312. Le module élastique de la colle est évalué par la valeur asymptotique de chaque courbe $G(t \rightarrow \infty)$. Le module viscoélastique est lui obtenu par la différence entre le pic initial $G(t = 0)$ et le module élastique. Les tendances observées en dynamique se retrouvent ici, à savoir un poids plus important du caractère viscoélastique en dessous de -15 °C et au dessus de 50 °C. Le poids du module viscoélastique sur le module élastique représente au minimum 20% et augmente jusqu'à 90% à 70 °C, lorsque la température s'approche de la transition vitreuse. Ce rapport augmente également vers -50 °C jusqu'à atteindre 40%. Le comportement viscoélastique de la colle Redux 312 est donc très marqué à haute température, mais il ne peut pas non plus être négligé aux autres températures testées.

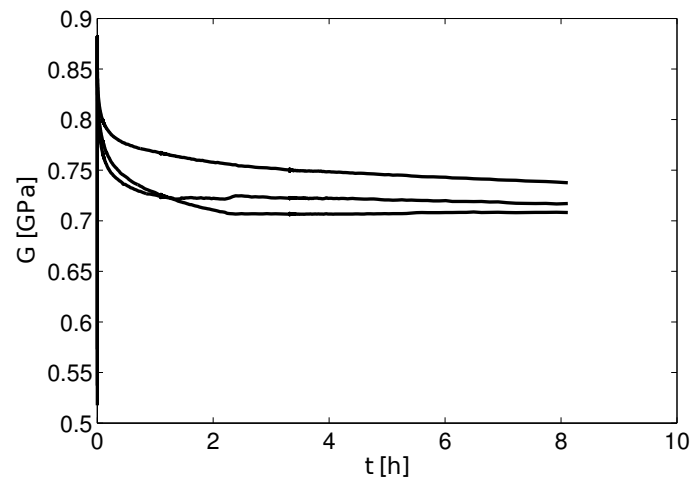


Fig. III.10 Evolution du module de cisaillement au cours du temps pour trois essais conduits à 50 °C.

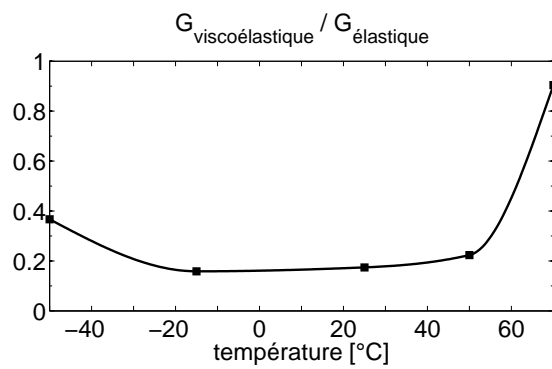


Fig. III.11 Rapport du module viscoélastique de la colle Redux 312 sur son module élastique, en fonction de la température.

Pour certains matériaux, il est possible de trouver une relation entre le comportement au fil du temps et son comportement lorsque la température varie. Il y a alors équivalence temps/température [Leb04]. Une telle relation permet de déterminer le comportement du matériau à chaque température en connaissant son comportement à une température donnée et en utilisant une loi permettant de passer d'une température à une autre. Ce principe d'équivalence des effets du temps et de la température est basé sur la construction d'une courbe maîtresse, représentant l'évolution du logarithme du module G en fonction du logarithme du temps t . La courbe maîtresse est alors obtenue par translation des courbes $G(t)$ sur l'axe des temps par multiplication de la coordonnée temporelle par un facteur a_T dépendant de la température. Des lois empiriques, comme la loi de Williams, Landel et Ferry, permettent de calculer ce facteur de glissement en fonction de la température T et de la température de transition vitreuse T_g , mais cette loi est généralement valable sur une plage $T_g - 50$ °C, $T_g + 50$ °C, ce qui ne fonctionne donc pas dans le cas présent. L'identification des paramètres dans le cadre de cette étude est donc une identification mathématique et le passage d'une température à une autre se fait par interpolation des paramètres obtenus à chaque température.

III.3 Identification des paramètres viscoélastiques

III.3.1 Objectif

L'objectif est de déterminer la loi de comportement de la Redux 312 à partir des résultats des essais de relaxation. Cette loi dépend à la fois de la température et du temps écoulé depuis l'application du chargement. Le comportement est modélisé par une loi de type Maxwell généralisée :

$$G(T, t - t_0) = \sum_{i=0}^n G_i(T) e^{-\alpha_i(T)(t-t_0)} \quad (\text{III.2})$$

où $G(T, t - t_0)$ représente le module d'Young de la colle à l'instant t pour un chargement établi en t_0 , à la température T . $1/\alpha_i(T)$ est le temps de relaxation de la branche i à la température T . α_0 est supposé être nul afin d'avoir un comportement solide pour la colle. L'objectif revient donc à déterminer un jeu de paramètres $\{\alpha_i(T), G_i(T)\}$ permettant de suivre au mieux les courbes expérimentales.

L'objectif est de pouvoir utiliser cette loi de comportement dans un modèle de calcul de type itératif comme celui présenté au paragraphe I.4.4.3. Cependant, pour

pouvoir utiliser cette méthode de calcul il faut que le terme $\alpha(T)$ soit constant. Or de très nombreuses solutions $\{\alpha_i(T), G_i(T)\}$ sont acceptables ici, donc afin de pouvoir utiliser cette loi de comportement dans les modèles de calcul et quitte à devoir utiliser plus de termes dans le modèle de Maxwell généralisé pour obtenir une solution satisfaisante, une condition supplémentaire est imposée sur les α_i : ils sont indépendants de la température, donc $\alpha_i(T) = \alpha_i$. Ils sont de plus supposés être ordonnés de manière à avoir : $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

Le domaine d'identification des paramètres est adapté pour l'utilisation qui concerne l'étude. Lors du décollage d'un avion, la température ambiante imposée à la structure est supposée se stabiliser en quelques minutes, aussi seules les cinq premières minutes des courbes expérimentales sont utilisées ici pour décrire le comportement thermo-viscoélastique de la colle. Cependant, la valeur du module élastique $G_0(T)$ étant celle vers laquelle chaque courbe converge lorsque le temps t augmente, toute la durée de l'essai est nécessaire pour obtenir une valeur précise.

La décomposition d'un signal composé d'une somme de termes en exponentielles est un problème récurrent dans de nombreuses disciplines scientifiques. De nombreuses méthodes existent donc dans la littérature, comme la technique dite du "pelage" [Sob93, CG00] où les différentes exponentielles sont extraites une par une, la méthode d'optimisation par les moindres carrés, où l'objectif est de minimiser une mesure de l'écart entre la courbe expérimentale et une courbe théorique. Des méthodes dites "globales" basées sur une transformée de la courbe permettent également de décomposer un signal. Elles sont basées sur les transformées de Fourier [GJGW59], les transformées en Z ou les transformées de Laplace [FVCM93, GOTNS99]. Une description de ces méthodes ainsi qu'un comparatif des résultats obtenus avec nos courbes sont présentés ci-dessous.

III.3.2 Présentation des méthodes existantes

III.3.2.1 Méthode de pelage

(a) Description de la méthode

Cette méthode permet de décomposer un signal en une somme d'exponentielles en commençant par les temps de retard longs et en affinant vers les temps de retard courts. Cette méthode est basée sur l'hypothèse que les différents temps de retard sont nettement différenciés, elle est décrite entre autres par Inokuchi [CG00]. Les

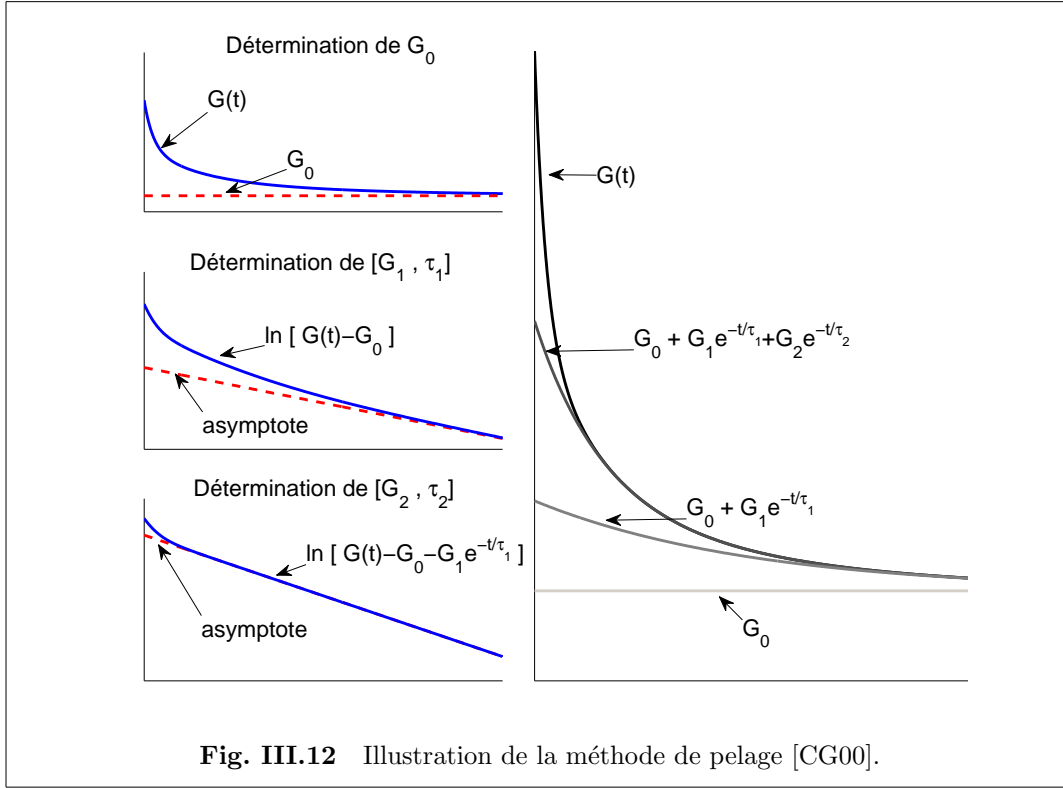


Fig. III.12 Illustration de la méthode de pelage [CG00].

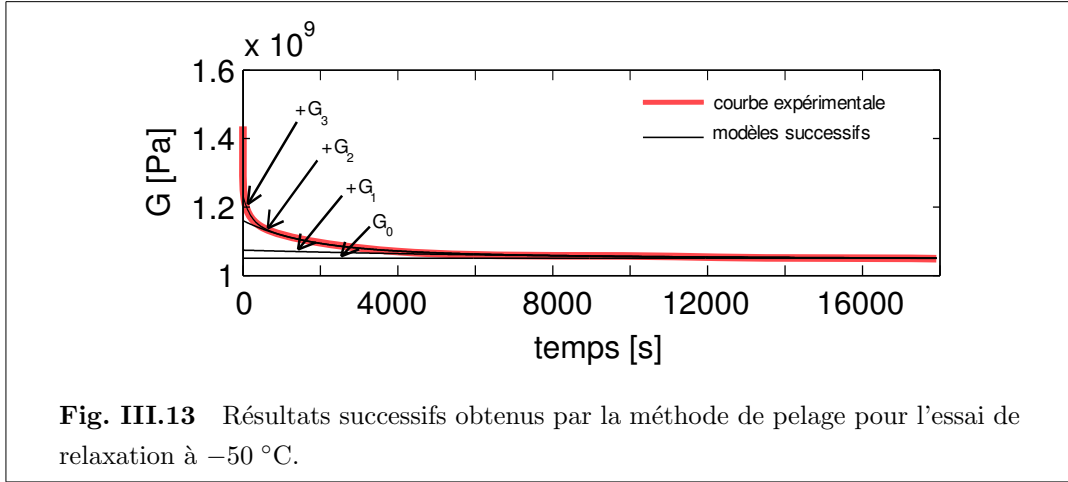
paramètres recherchés sont les G_i et τ_i d'une fonction G décrite par la série suivante :

$$G(t) = G_0 + \sum_{i=1}^n G_i \exp(-t/\tau_i) \quad \text{avec } t \geq 0 \quad (\text{III.3})$$

avec $\tau_1 \gg \tau_2 \gg \dots \gg \tau_n$. Par analogie avec l'équation (III.2), les temps de retards τ_i correspondent aux termes " $1/\alpha_i$ ".

La procédure appliquée est la suivante (cf. figure III.12) :

1. La valeur de G_0 correspond à la limite pour t tendant vers l'infini. Elle est supposée atteinte à la fin de l'essai. C'est donc la valeur finale de $G(t)$ qui donne G_0 .
2. La fonction $\ln(G(t) - G_0)$ tend vers une asymptote d'équation $\ln(G_1) - t/\tau_1$. G_1 et τ_1 sont obtenus en identifiant les paramètres de l'asymptote expérimentale à cette équation.
3. La fonction $\ln(G(t) - G_0 - G_1 \exp(-t/\tau_1))$ tend vers une asymptote d'équation $\ln(G_2) - t/\tau_2$. G_2 et τ_2 sont obtenus en identifiant les paramètres de l'asymptote expérimentale à cette équation.



4. Les couples $\{G_i, \tau_i\}$ suivants sont obtenus successivement de la même manière et la procédure est arrêtée lorsque l'écart entre la courbe expérimentale et le modèle est considéré comme négligeable.

(b) Application de la méthode

Les résultats successifs obtenus pour une courbe expérimentale typique, ici l'essai de relaxation à $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$, sont présentés sur la figure III.13. La courbe modèle se rapproche peu à peu de la courbe expérimentale. L'écart maximal se situe au niveau des temps courts et se réduit simplement en augmentant le nombre de termes dans la série. Cette méthode, très facile à mettre en oeuvre, permet d'obtenir rapidement un résultat tout à fait acceptable pour une courbe, donc à une température donnée. Cependant, rien ne permet de contraindre l'égalité des temps de retard entre les courbes obtenues aux différentes températures et donc de vérifier la condition " $\alpha_i(T) = \alpha_i$ ". Or cette condition est nécessaire pour pouvoir mener à bien le calcul des contraintes dans la structure collée.

III.3.2.2 Méthode de Padé-Laplace

(a) Théorie de la méthode de Padé-Laplace

La méthode de Padé-Laplace présentée ci-dessous est exposée dans [FVCM93] où une fonction f , décrite par une série d'exponentielles, est décomposée. La fonction f

est supposée s'écrire sous la forme suivante :

$$f(t) = \sum_{k=1}^n G_k \exp(\mu_k t) \quad \text{avec } t \geq 0 \quad (\text{III.4})$$

où les μ_k sont généralement des nombres complexes :

$$\mu_k = \lambda_k + i\omega_k \quad (\text{III.5})$$

Comme les temps de retard sont des réels positifs, par analogie avec l'équation (III.2) il vient :

$$\tau_k = 1/\alpha_k = -1/\mu_k = -1/\lambda_k \quad (\text{III.6})$$

Lorsque les μ_k sont purement imaginaires, la détection des composantes de la somme de l'équation (III.4) peut se faire à l'aide des séries de Fourier. Cependant, lorsqu'il s'agit de nombres complexes, la transformée de Laplace est plus appropriée :

$$Lf(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \quad (\text{III.7})$$

avec p un nombre complexe et $Lf(p)$ la transformée de Laplace de la fonction f en p .

La transformée de Laplace appliquée à l'équation (III.4) donne :

$$Lf(p) = \sum_{k=1}^n \frac{G_k}{p - \mu_k} \quad (\text{III.8})$$

avec $\Re(p) > \sup_k \Re(\mu_k)$. Cette condition assure la convergence de la transformée de Laplace et de ses dérivées. La fonction $Lf(p)$ est alors une fonction analytique de p définie dans la moitié droite du plan complexe.

Dans le cadre de cette étude, la fonction f est une courbe expérimentale, connue uniquement aux points de mesure t_j . La transformée $Lf(p)$ est obtenue par intégration numérique. C'est une fonction analytique de la variable p . La recherche des G_k et μ_k est donc un problème théorique connu puisqu'il consiste à déterminer les pôles μ_k et les résidus G_k de la fonction $Lf(p)$. Cependant, comme $Lf(p)$ n'est calculable que dans une zone qui ne contient pas les pôles μ_k , il n'est pas possible de détecter ces pôles par intégration numérique directe. Il est alors nécessaire de considérer le prolongement analytique de la fonction $Lf(p)$ dans l'ensemble du plan complexe.

Pour cela, le développement de Taylor de $Lf(p)$, noté $\hat{F}(p)$, est d'abord calculé en un point p_0 du demi-plan de convergence :

$$\hat{F}(p) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r!} \frac{d^r Lf}{dp^r} \Big|_{p=p_0} \right) p'^r = \sum_{r=0}^{\infty} c_r p'^r \quad (\text{III.9})$$

avec $p' = p - p_0$.

et avec :

$$\frac{d^r Lf(p)}{dp^r} = \int_0^{\infty} (-t)^r f(t) e^{-pt} dt \quad (\text{III.10})$$

Les approximants de Padé permettent ensuite d'approcher cette fonction analytique $\hat{F}(p)$ par une fonction rationnelle. Ces approximants sont habituellement notés $[N/M]$ avec N et M des entiers positifs.

Un approximant de Padé d'indice $[N/M]$ désigne une fraction rationnelle de type $A_N(p')/B_M(p')$, telle que les degrés des polynômes $A_N(p')$ et $B_M(p')$ soient inférieurs ou égaux respectivement à N et M et que le développement limité à l'ordre $M + N$ de la fraction soit identique à celui de la fonction $\hat{F}(p)$. $[N/M]$ s'écrit alors :

$$[N/M] = \frac{A_N(p')}{B_M(p')} = \frac{\sum_{s=0}^N a_s p'^s}{\sum_{v=0}^M b_v p'^v} \quad (\text{III.11})$$

avec $b_0 = 1$ et satisfaisant :

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r p'^r = \frac{\sum_{s=0}^N a_s p'^s}{\sum_{v=0}^M b_v p'^v} + \theta(p'^{N+M+1}) \quad (\text{III.12})$$

Connaissant les coefficients $\{c_r\}$, il faut alors déterminer les coefficients $\{a_s\}$ et $\{b_v\}$, tels que :

$$(1 + b_1 p' + \dots + b_M p'^M)(c_0 + c_1 p' + c_2 p'^2 + \dots) - (a_0 + a_1 p' + \dots + a_N p'^N) = \theta(p'^{N+M+1}) \quad (\text{III.13})$$

L'expression (III.13) mène à un système de $M + N + 1$ équations linéaires per-

mettant de déterminer les coefficients $\{a_s\}$ et $\{b_v\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = a_0 \\ c_1 + b_1 c_0 = a_1 \\ \dots \\ c_N + b_1 c_{N-1} + \dots + b_{N-1} c_1 + b_N c_0 = a_N \\ c_{N+1} + b_1 c_N + \dots + b_N c_1 + b_{N+1} c_0 = 0 \\ c_{N+2} + b_1 c_{N+1} + \dots + b_{N+1} c_1 + b_{N+2} c_0 = 0 \\ \dots \\ c_{N+M} + b_1 c_{N+M-1} + \dots + b_M c_N = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.14})$$

Une fois ces coefficients obtenus, l'approximant de Padé $[N/M]$ peut être réécrit pour mettre en valeur les racines $\{\gamma'\}$ et $\{\beta'\}$ des polynômes $A_N(p')$ et $B_M(p')$.

En revenant à la variable p et en posant maintenant $\gamma_s = p_0 + \gamma'_s$ et $\beta_v = p_0 + \beta'_v$, l'équation (III.11) se réécrit :

$$[N/M] = \frac{a_N}{b_M} \frac{\prod_{s=1}^N (p - \gamma_s)}{\prod_{v=1}^M (p - \beta_v)} \quad (\text{III.15})$$

En remarquant maintenant que l'expression (III.8) est le résultat de la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle $P_{n-1}(p)/Q_n(p)$ qui peut s'écrire dans une forme analogue à l'expression (III.15), seuls les approximants de Padé de degrés $[N - 1/N]$ suffisent alors pour décrire la fonction $Lf(p)$.

De plus, d'après un théorème sur la représentation d'une fonction rationnelle par des approximants de Padé [BJ65], tous les approximants $[N - 1/N]$ avec $N > n$ se réduisent à l'approximant de Padé $[n - 1/n]$ qui représente alors exactement la fonction rationnelle $Lf(p)$:

$$Lf(p) = \frac{a'_{n-1}}{b'_n} \frac{\prod_{u=1}^{n-1} (p - \alpha_u)}{\prod_{k=1}^n (p - \mu_k)} \equiv \frac{a_{n-1}}{b_n} \frac{\prod_{s=1}^{n-1} (p - \gamma_s)}{\prod_{v=1}^n (p - \beta_v)} \quad (\text{III.16})$$

Ainsi, il apparaît que les exposants μ_k du signal $f(t)$ sont les racines du polynôme du dénominateur de l'approximant de Padé $[n - 1/n]$, le nombre n de termes dans la série d'exponentielles étant donné par le degré du polynôme du dénominateur de $[n - 1/n]$. Cette méthode ne nécessite donc pas d'hypothèse sur le nombre n avant le calcul.

(b) Utilisation pratique de la méthode

En pratique, la courbe $G(t)$ résultant d'un essai de relaxation est décrite de manière discrète par deux vecteurs : le temps t par t_i et le module de cisaillement G par G_i . La méthode suivie pour déterminer la décomposition en série d'exponentielles est la suivante :

1. choix de p_0 ;
2. choix de M (initialisé à $M = 0$) ;
3. calcul de $\hat{F}(p)$ par intégration numérique en utilisant les équations (III.9) et (III.10) ;
4. calcul de l'approximant $[M/M + 1]$ par résolution du système linéaire (III.14) ;
5. obtention des G_i et τ_i en sachant que les G_i et les $1/\tau_i$ sont respectivement les résidus et les pôles du quotient de polynômes $[M/M+1]$;
6. incrémentation de M .

Les solutions successives obtenues pour G_i et τ_i lorsque M augmente convergent en théorie vers la décomposition en exponentielles du signal de départ $f(t)$.

(c) Résultats obtenus

Dans le tableau III.1 sont listées les parties réelles et imaginaires des G_i et μ_i successifs obtenus pour des $[M/M + 1]$ croissants. La courbe analysée est une courbe typique de relaxation du module de cisaillement. A chaque fois, l'écart moyen obtenu entre la courbe expérimentale et le modèle proposé est évalué par le RMS ("Root Mean Square" ou écart quadratique moyen).

Certains résultats correspondent à des modules G_i complexes ($\Im(G) \neq 0$), à des temps de retard complexes ($\Im(\mu) \neq 0$) ou encore négatifs ($\Re(\mu) > 0$). Les nombres complexes obtenus sont un résultat classique de cette méthode. Deux nombres complexes conjugués sont généralement présents et il ne faut pas les prendre en compte. En ce qui concerne les temps de retard négatifs, ils permettent de s'approcher un peu mieux de la courbe expérimentale sur la durée étudiée mais ne peuvent pas être pris en compte puisqu'ils tendent à faire augmenter le module de cisaillement de la colle au fil du temps. Les courbes successives correspondant aux G_i et τ_i obtenus validant ces conditions sont représentées sur la figure III.14. Le résultat obtenu dans ce cas est donc globalement satisfaisant pour une somme de trois exponentielles. Au-delà de trois, des termes complexes apparaissent dans les résultats et ne sont donc pas pris en

[M/M+1]	Re(μ)	Im(μ)	Re(G)	Im(G)	
[0/1]	-3.06060 10^{-3}	0	+6.56678 10^8	0	✓
	$\Rightarrow \text{rms} = 7.20 \cdot 10^{11}$ (1 branche valable)				
[1/2]	-1.39398 10^{-1}	0	+4.96626 10^7	0	✓
	-1.12254 10^{-3}	0	+6.23351 10^8	0	✓
	$\Rightarrow \text{rms} = 1.11 \cdot 10^7$ (2 branches valables)				
[2/3]	-3.12124 10^{-1}	0	+3.20031 10^7	0	✓
	-3.77985 10^{-2}	0	+4.82696 10^7	0	✓
	-5.80851 10^{-4}	0	+5.97834 10^8	0	✓
	$\Rightarrow \text{rms} = 7.09 \cdot 10^6$ (3 branches valables)				
[3/4]	-3.47518 10^{-1}	0	+2.97015 10^7	0	✓
	-5.15140 10^{-2}	0	+3.84294 10^7	0	✓
	-1.09394 10^{-3}	0	+5.97036 10^8	0	✓
	+7.86145 10^{-3}	0	+1.34523 10^7	0	
	$\Rightarrow \text{rms} = 2.00 \cdot 10^7$ (3 branches valables)				
[4/5]	-2.22305 10^{-1}	0	+4.34043 10^7	0	✓
	-5.79869 10^{-2}	+1.91216 10^{-1}	-1.60468 10^6	+3.14866 10^5	
	-5.79869 10^{-2}	-1.91216 10^{-1}	-1.60468 10^6	-3.14866 10^5	
	-2.23047 10^{-2}	0	+5.68416 10^7	0	✓
	-3.77685 10^{-4}	0	+5.80438 10^8	0	✓
	$\Rightarrow \text{rms} = 6.89 \cdot 10^6$ (3 branches valables)				
[5/6]	-1.33636 10^{-1}	+2.59548 10^{-1}	+1.08184 10^6	+4.08505 10^6	
	-1.33636 10^{-1}	-2.59548 10^{-1}	+1.08184 10^6	-4.08505 10^6	
	-1.54186 10^{-1}	0	+4.15758 10^7	0	✓
	-1.63154 10^{-2}	0	+7.23861 10^7	0	✓
	-1.15541 10^{-4}	0	+5.63249 10^8	0	✓
	+8.87155 10^{-3}	0	-2.44874 10^6	0	
	$\Rightarrow \text{rms} = 8.58 \cdot 10^6$ (3 branches valables)				
[6/7]	-2.34434 10^{-1}	0	+4.35326 10^7	0	✓
	-5.91488 10^{-2}	+1.72443 10^{-1}	-1.64905 10^6	-4.22034 10^5	
	-5.91488 10^{-2}	-1.72443 10^{-1}	-1.64905 10^6	+4.22034 10^5	
	+2.62070 10^{-1}	0	+1.44496 10^2	0	
	-2.23229 10^{-2}	0	+5.71047 10^7	0	✓
	-3.76408 10^{-4}	0	+5.80341 10^8	0	✓
	+6.00361 10^{-2}	0	-3.84769 10^{-1}	0	
	$\Rightarrow \text{rms} = 6.82 \cdot 10^6$ (3 branches valables)				

Tab. III.1 Résultats successifs obtenus à l'aide de la méthode de Padé-Laplace.
Les branches valables sont signalées dans la dernière colonne.

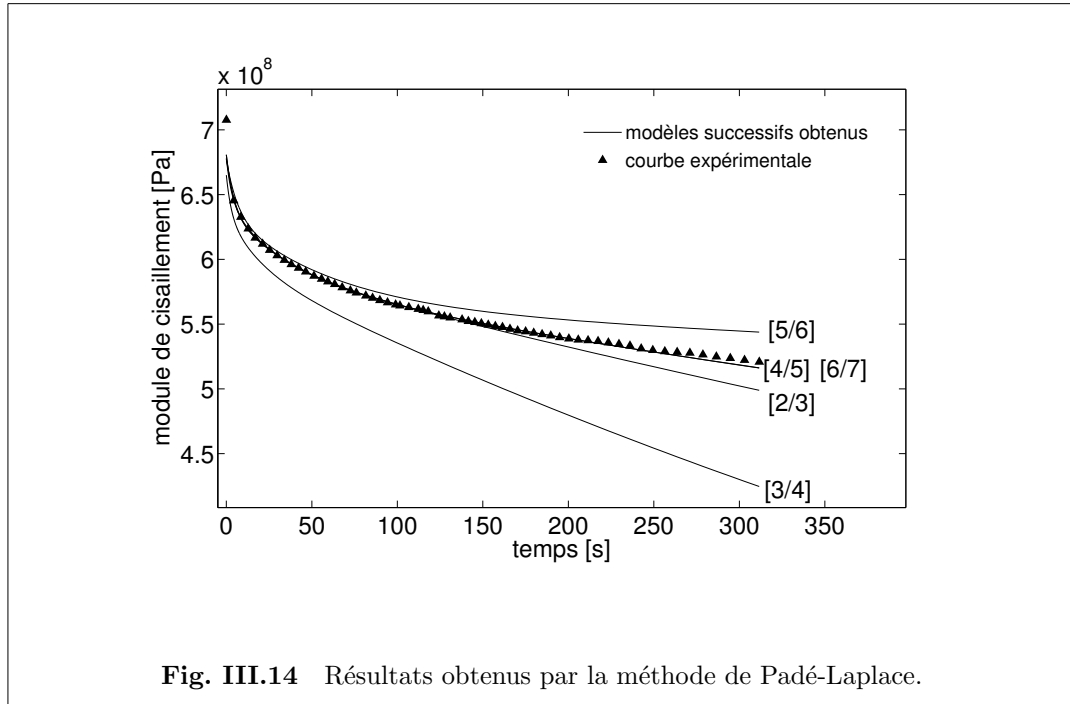


Fig. III.14 Résultats obtenus par la méthode de Padé-Laplace.

compte. L'écart moyen ne semble pas converger et atteint au mieux quelques MPa. Les solutions les plus proches de la courbe expérimentale : [2/3], [4/5] et [5/6] peuvent donc être améliorées et servir de point de départ dans un processus d'optimisation.

Il faut noter enfin que, comme pour la méthode de pelage, cette méthode ne permet pas non plus de contraindre le résultat entre les courbes obtenues aux différentes températures. Il n'est pas possible ici d'imposer la condition " $\alpha_i(T) = \alpha_i$ " nécessaire au bon déroulement du calcul.

III.3.2.3 Méthodes d'optimisation

Le principe des méthodes d'optimisation est de minimiser une fonction coût représentant l'éloignement entre la courbe expérimentale et une fonction modèle. Une fonction coût typique est l'écart quadratique moyen entre la courbe expérimentale discrète $G_{exp}(t_i)$ et la courbe théorique $G_{th}(t)$. Cependant, comme l'écart entre deux points de mesure successifs t_i et t_{i+1} n'est pas toujours constant, il n'est pas souhaitable d'accorder le même poids à tous les points de mesure. C'est donc une moyenne des écarts pondérés, notée Φ , qui est minimisée. Le poids accordé à chaque point de mesure correspond à la durée entre ce point de mesure et le suivant. De ce fait, une zone où les points de mesure sont très proches ne pèse pas plus dans le calcul

de l'écart moyen qu'une zone où les points sont moins nombreux. La moyenne de ces écarts revient donc à effectuer un calcul intégral de la distance entre les courbes théorique et expérimentale. Cet écart moyen est donc donné par :

$$\Phi = \frac{1}{t_{max}} \int_0^{t_{max}} |G_{th}(t) - G_{exp}(t)| dt \quad (III.17)$$

Cette fonction à minimiser n'est pas dérivable étant donnée la présence d'une valeur absolue, mais l'algorithme utilisé pour la recherche du minimum est basé sur une méthode d'ordre 0 et ne nécessite pas la connaissance de la dérivée de la fonction. L'équation (III.17) permet de mesurer l'écart moyen de $t = 0$ à t_{max} entre une courbe théorique $G_{th}(t)$ et une courbe expérimentale $G_{exp}(t)$. Pour tenir compte de toutes les courbes dans cette mesure, il suffit de mesurer tous les écarts et d'en minimiser la moyenne ou une moyenne pondérée. La figure III.15 présente le résultat obtenu en imposant des α_i constants en fonction de la température et en accordant le même poids à chaque courbe. Ces méthodes présentent l'avantage de pouvoir imposer la condition $\alpha_i(T)$ constant en traitant l'ensemble des courbes en une seule étape. L'inconvénient de ces méthodes, par contre, est le choix d'un point de départ judicieux évitant de converger vers un minimum local. Ce choix est d'autant plus difficile quand le nombre d'exponentielles augmente. Le processus d'optimisation devient alors relativement long sans converger forcément vers une solution satisfaisante. Le résultat présenté ici est obtenu pour deux branches viscoélastiques et l'optimisation est calculée sur 10 000 s. Le résultat obtenu n'est pas pleinement satisfaisant, en particulier pour la courbe de relaxation à 70 °C, où l'écart entre le modèle et la courbe expérimentale est encore important aux temps courts. Il faudrait ajouter des branches viscoélastiques pour affiner le résultat.

III.3.2.4 Comparatif

Le comparatif des résultats donnés par ces différentes méthodes sur une courbe expérimentale est présenté sur la figure III.16. Les remarques suivantes peuvent être formulées :

- la méthode de pelage permet facilement d'approcher la courbe expérimentale des temps longs vers les temps courts en ajoutant des branches ;
- la méthode de Padé Laplace donne un résultat correct en moyenne, mais ne donne pas systématiquement un résultat acceptable. En l'occurrence, pour le cas présenté, l'écart moyen reste important. Ce résultat est toutefois obtenu très rapidement et sans aucune hypothèse de départ. Il représente donc un

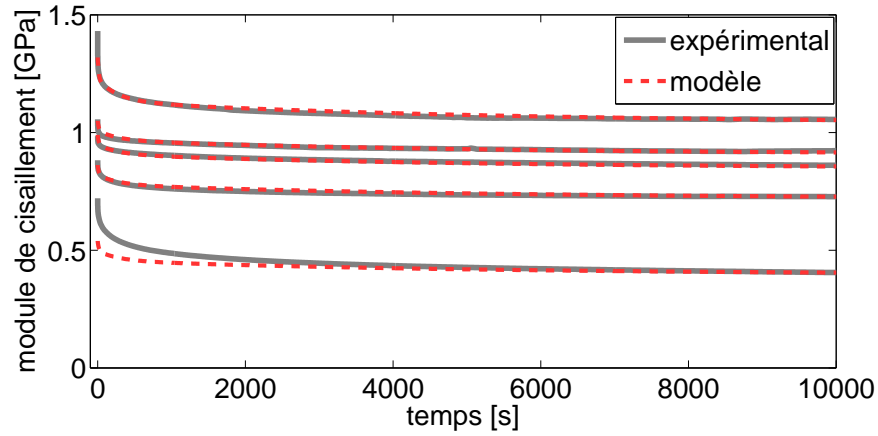


Fig. III.15 Résultats obtenus par la méthode d'optimisation.

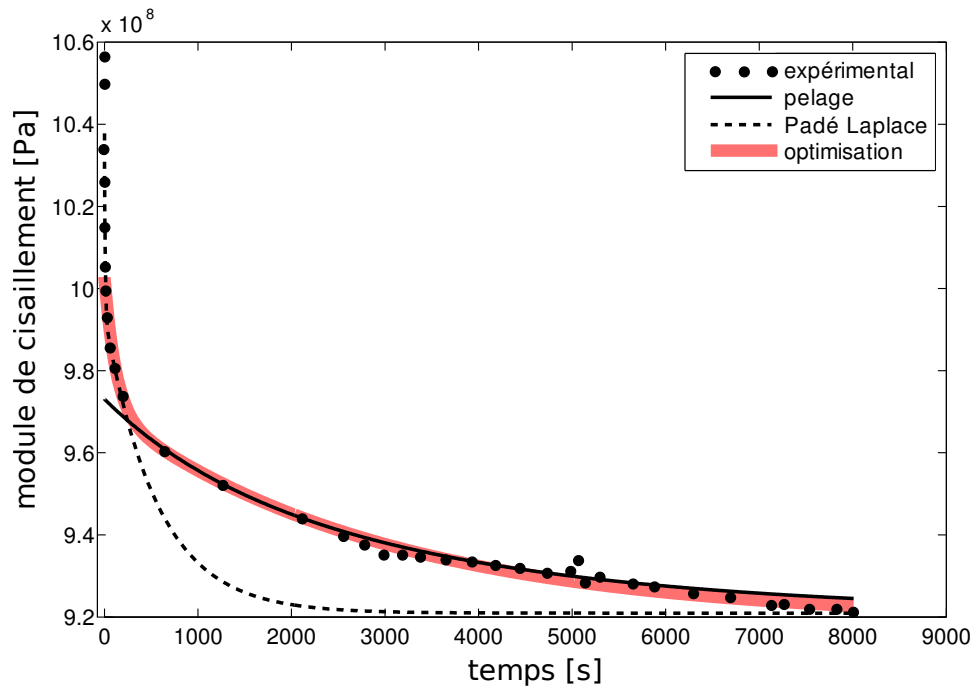
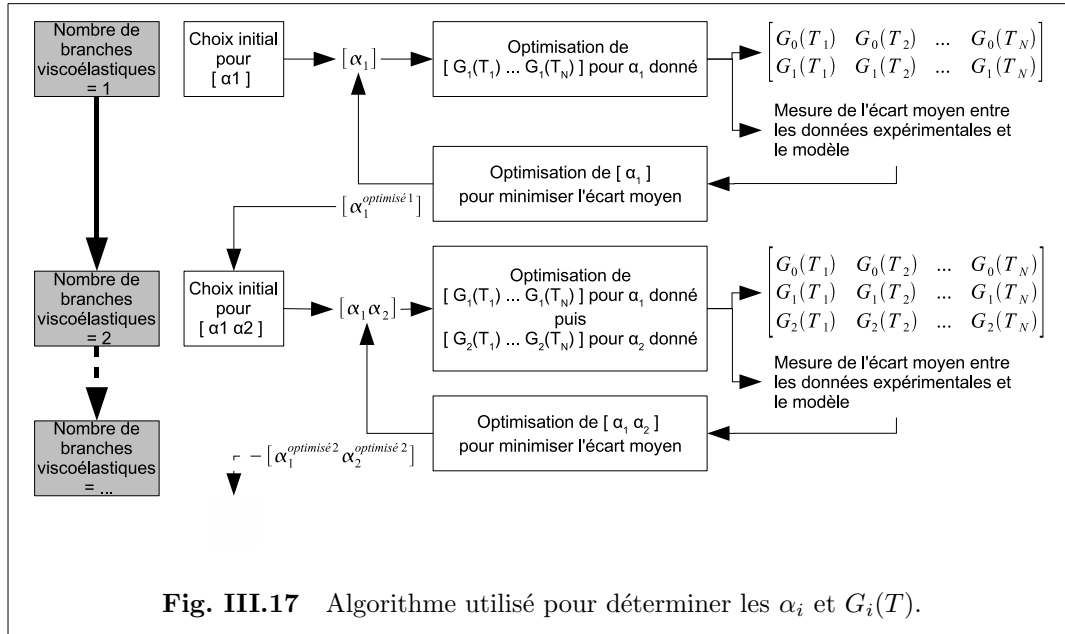


Fig. III.16 Comparaison des résultats obtenus à l'aide des différentes méthodes. Pour cet exemple, la méthode de Padé-Laplace ne fournit pas un résultat acceptable, contrairement aux deux autres méthodes, plus robustes.



bon point de départ pour un processus d'optimisation. Il est cependant difficile avec cette méthode d'augmenter manuellement le nombre d'exponentielles si le résultat obtenu ne semble pas satisfaisant ;

- les résultats optimisés présentent un bon écart moyen, mais l'écart initial entre courbes théoriques et expérimentales est encore important. L'ajout de branches permet de pallier ce problème, mais le choix d'un point de départ pertinent devient alors de plus en plus difficile.

Au vu de ces résultats, une procédure spécifique adaptée au problème a été développée. Elle est présentée ci-après.

III.3.3 Méthode retenue

III.3.3.1 Principe

Le principe de la méthode retenue est de cumuler les avantages de deux des méthodes présentées précédemment, à savoir la méthode de pelage et un processus d'optimisation. L'algorithme proposé est présenté sur la figure III.17. Etant donnée la difficulté de choisir un bon point de départ pour une optimisation lorsque le nombre de paramètres augmente, il est proposé ici d'augmenter progressivement ce nombre de paramètres.

Dans un premier temps, les valeurs des $G_0(T)$ sont relevées à la fin des courbes ex-

périmentales. L'algorithme commence par l'optimisation de α_1 seul. Un premier choix de α_1 est réalisé puis les paramètres $G_1(T)$ sont optimisés pour s'approcher au mieux des cinq courbes expérimentales. L'écart moyen entre les courbes expérimentales et leur courbes théoriques correspondantes est évalué de la manière suivante :

$$\begin{cases} \Phi(T_i) = \frac{1}{t_{max}} \int_0^{t_{max}} |G_{th}(T_i, t) - G_{exp}(T_i, t)| dt \\ \Phi_{moyen} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \Phi(T_i) \end{cases} \quad (III.18)$$

où t_{max} représente la durée considérée. α_1 est donc optimisé pour minimiser cet écart Φ_{moyen} . Une première estimation de α_1 est ainsi obtenue : $\alpha_1^{\text{optimisé } 1}$.

Le nombre d'exponentielles est ensuite augmenté, il faut alors optimiser α_1 et α_2 . Le choix initial du couple $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ est déterminé en fonction du $\alpha_1^{\text{optimisé } 1}$ obtenu précédemment : $\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{\alpha_1^{\text{optimisé } 1}, 10\alpha_1^{\text{optimisé } 1}\}$. Cela permet d'avoir un temps de retard plus court pour α_2 . Le choix du rapport initial entre ces deux temps de retard est arbitraire. Il n'a pas vraiment d'influence sur le résultat obtenu après optimisation mais correspond à un ordre de grandeur raisonnable. C'est le choix d'une méthode de type pelage qui aboutit à des temps de retards bien dissociés. Comme pour la première optimisation, les $G_0(T)$ sont relevées à la fin des courbes expérimentales. Ensuite, comme pour la technique du pelage, les $G_1(T)$ sont optimisés en fonction du α_1 donné pour s'approcher au mieux de la fin de la courbe. Enfin, les $G_2(T)$ sont optimisés pour ajuster le début de la courbe. Les optimisations successives des différents $G_i(T)$ sont faites en considérant la fin de la courbe, puis en prenant en compte petit à petit des temps de plus en plus proches de l'origine. Les zones d'optimisations sont déterminées en fonction des temps de retards $1/\alpha_i$. L'optimisation des $G_i(T)$ correspondant à la dernière branche considérée est effectuée en considérant l'ensemble de la courbe de 0 à t_{max} .

Le même procédé est appliqué ensuite en augmentant progressivement le nombre d'exponentielles et en initialisant l'optimisation des paramètres $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}\}$ par les $\{\alpha_1^{\text{optimisé } i}, \dots, \alpha_i^{\text{optimisé } i}\}$ et en choisissant $\alpha_{i+1} = 10\alpha_i^{\text{optimisé } i}$. L'algorithme est stoppé lorsque le plus petit temps de retard obtenu est inférieur à 0.1 s. C'est-à-dire lorsque le choix initial du prochain plus petit temps de retard devient inférieur à la période d'échantillonnage des mesures expérimentales qui est de 10 ms.

III.3.3.2 Résultats

La recherche des paramètres de la colle est effectuée ici en ne considérant que les 300 premières secondes des essais réalisés. Le modèle obtenu ne sera donc plus valable au-delà de cette durée. Celle-ci a été choisie en fonction du contexte de l'étude où seule l'évolution des contraintes au cours des cinq premières minutes est considérée.

Au fur et à mesure que le nombre de branches viscoélastiques prises en compte augmente, l'écart entre les courbes expérimentales et les modèles successifs obtenus diminue. L'écart moyen et l'écart maximal obtenus en fonction du nombre de branches viscoélastiques du modèle sont représentés sur la figure III.18. L'écart moyen entre les résultats théoriques et expérimentaux se stabilise dès trois branches (dont une élastique) et vaut environ 1 MPa. Les courbes se superposent donc très bien sur la majeure partie de la durée considérée. Cependant l'écart initial entre ces courbes reste encore important. Un grand nombre de branches permet de suivre plus finement l'évolution des courbes expérimentales pour des temps courts. Pour cinq branches viscoélastiques, l'écart maximal devient inférieur à 10 MPa. D'un point de vue numérique cependant, l'utilisation d'un nombre de branches élevé risque d'entraîner des temps de calcul également élevés (cf. chapitre IV). Un compromis devra donc être trouvé entre nombre de branches élevé, temps de calcul et précision souhaitée.

Le modèle obtenu pour cinq branches viscoélastiques est représenté sur la figure III.19 où il est comparé aux résultats expérimentaux (cf. figure III.19(a)). L'évolution du module élastique G_0 est comparée à celle de la somme des modules des branches viscoélastiques (cf. figure III.19(b)), mettant ainsi en évidence le poids plus important des branches viscoélastiques aux hautes températures ainsi qu'aux basses températures.

Les temps de retard obtenus par cette méthode varient entre 40 ms et 108 s. Le rapport entre le temps de retard d'une branche et la suivante est aux alentours de 10. Etant donné la méthode employée, adaptée de la méthode de pelage, les temps de retard obtenus sont bien dissociés.

Les résultats détaillés obtenus en considérant deux branches viscoélastiques puis cinq branches viscoélastiques sont donnés dans les tableaux III.2 et III.3. Le module élastique $G_0(T)$ obtenu est identique dans les deux cas, mais le poids de la partie viscoélastique est plus important en considérant un nombre plus grand de branches puisque le modèle obtenu est plus proche de la courbe aux temps très courts. Il faut noter également que ce poids relatif serait plus important en considérant une durée

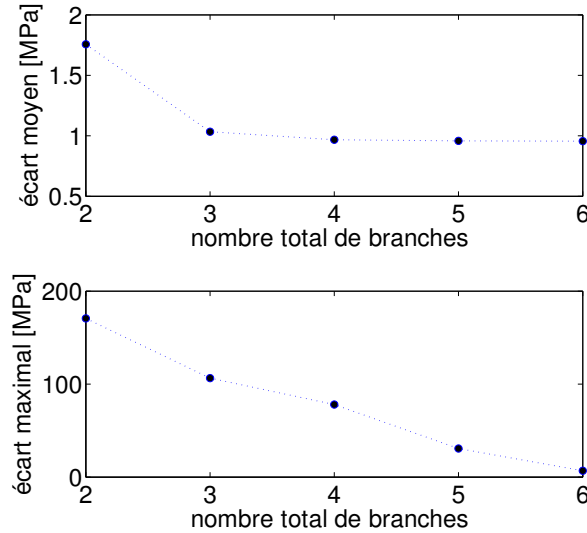


Fig. III.18 Etude de convergence pour un nombre croissant de branches (élastique et viscoélastiques).

T	[°C]		-50	-15	25	50	70
G_0	[GPa]	($\alpha_0 = 0$)	1.1584	0.9694	0.9200	0.7839	0.5375
G_1	[GPa]	($\alpha_1 = 0.0093$)	0.0927	0.0295	0.0326	0.0520	0.1095
G_2	[GPa]	($\alpha_2 = 0.1284$)	0.0706	0.0250	0.0144	0.0261	0.0360
$\Sigma(G_i)$	[GPa]		1.3217	1.0240	0.9670	0.8621	0.6830

Tab. III.2 Paramètres obtenus en optimisant deux branches viscoélastiques.

plus longue pour l'identification puisque le module de cisaillement diminue encore au-delà de 300 s.

III.4 Conclusion

Différents essais ont été conduits pour caractériser le comportement de la colle Redux 312. La température T_g de transition vitreuse correspond à une zone située entre 105 °C et 115 °C. Les essais de relaxation menés à différentes températures et une méthode adaptée de dépouillement des résultats ont permis d'obtenir un modèle de loi de comportement thermo-viscoélastique pour la colle. Ce modèle est valable ici sur 300 s mais la méthode présentée peut également être utilisée en considérant des

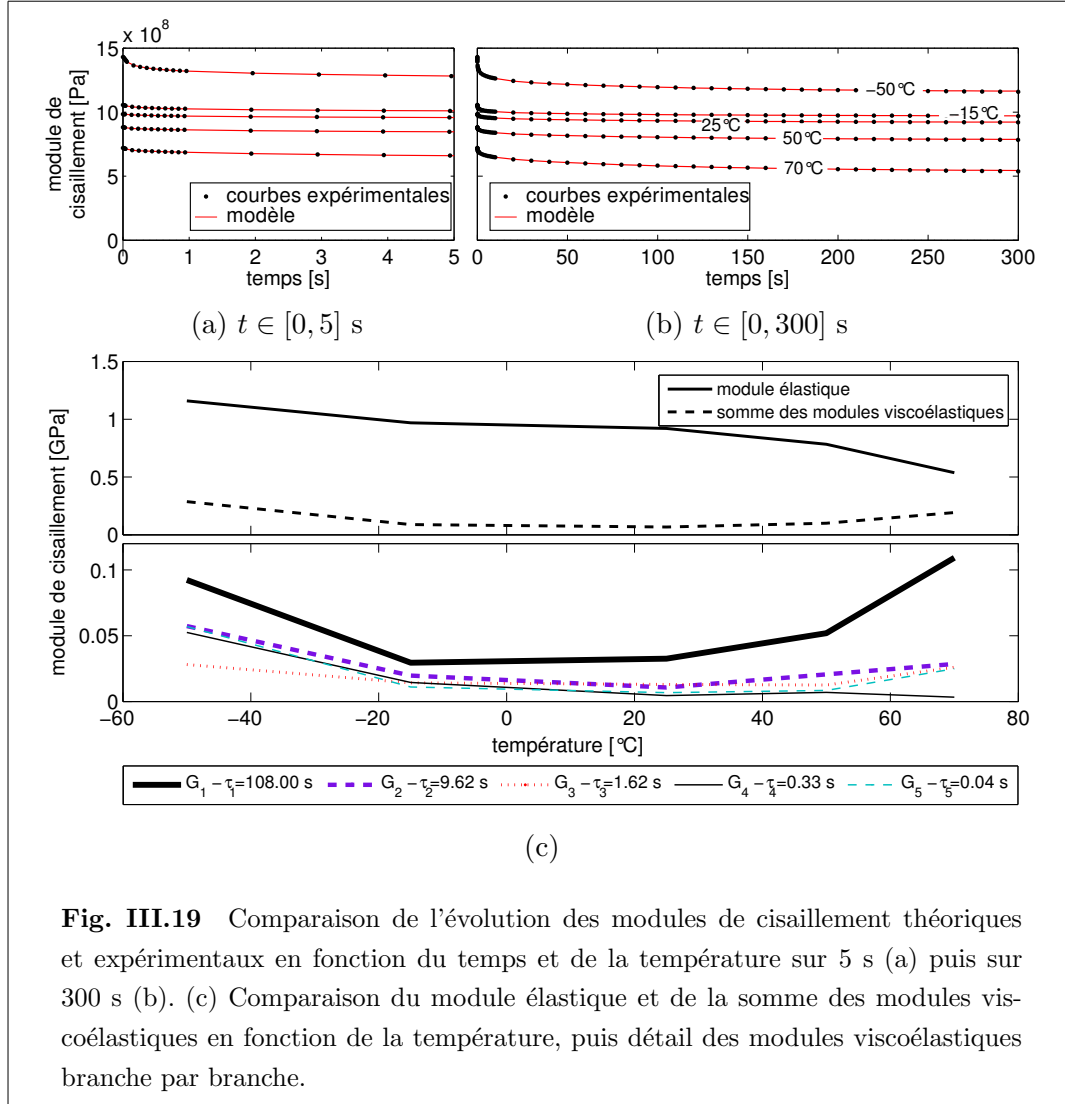


Fig. III.19 Comparaison de l'évolution des modules de cisaillement théoriques et expérimentaux en fonction du temps et de la température sur 5 s (a) puis sur 300 s (b). (c) Comparaison du module élastique et de la somme des modules viscoélastiques en fonction de la température, puis détail des modules viscoélastiques branche par branche.

T	[°C]		-50	-15	25	50	70
G_0	[GPa]	$(\alpha_0 = 0)$	1.1584	0.9694	0.9200	0.7839	0.5375
G_1	[GPa]	$(\alpha_1 = 0.0093)$	0.0924	0.0295	0.0326	0.0520	0.1092
G_2	[GPa]	$(\alpha_1 = 0.1036)$	0.0572	0.0196	0.0106	0.0206	0.0285
G_3	[GPa]	$(\alpha_1 = 0.6010)$	0.0276	0.0139	0.0129	0.0123	0.0255
G_4	[GPa]	$(\alpha_1 = 3.0387)$	0.0531	0.0155	0.0047	0.0074	0.0045
G_5	[GPa]	$(\alpha_2 = 23.8411)$	0.0614	0.0101	0.0070	0.0085	0.0250
$\Sigma(G_i)$	[GPa]		1.4501	1.0581	0.9878	0.8846	0.7303

Tab. III.3 Paramètres obtenus en optimisant cinq branches viscoélastiques.

durées plus longues. Ce modèle respecte la condition imposée d'avoir un temps de retard constant pour chaque branche viscoélastique en fonction de la température. Ce critère a été imposé pour simplifier l'utilisation de cette loi de comportement dans le modèle de joint collé présenté au chapitre IV, où les influences séparées de la température et de l'historique de chargement sont traitées.

Chapitre IV

Modèle de comportement thermo-viscoélastique d'un joint collé

Ce chapitre est consacré au développement d'un modèle de calcul intégrant le comportement thermo-viscoélastique de la colle tel qu'il a été identifié au chapitre III. Cette méthode permet de mettre en évidence les effets thermiques et viscoélastiques qui sont susceptibles de prendre place au sein d'un assemblage collé. Différents exemples montrent les effets de chacun des paramètres de manière progressive.

Sommaire

IV.1	Introduction	101
IV.2	Développement d'un modèle thermo-viscoélastique . . .	102
IV.2.1	Géométrie et notations	102
IV.2.2	Equations d'équilibre	103
IV.2.3	Lois de comportement	103
IV.2.4	Ecriture du cisaillement dans la colle	104
IV.2.5	Dérivation de l'équation d'équilibre dans le patch composite	105
IV.2.6	Calcul de $\kappa_\mu(x, t_j)$	106
IV.2.7	Calcul des intégrales $I_1^\mu(t_{j-1}, t_j)$ et $I_2^\mu(t_{j-1}, t_j)$	107
IV.2.8	Réécriture de l'équation différentielle régissant $\sigma_{xx}^c(x, t_j)$.	109
IV.2.9	Résolution par itérations de $\sigma_{xx}^c(x, t_j)$	110
IV.3	Remarques sur le calcul	111
IV.3.1	Comparaison avec un calcul élastique	111
IV.3.2	Convergence temporelle	112
IV.3.3	Convergence spatiale	113
IV.4	Application de la solution	115
IV.4.1	Description du chargement appliqué	115
IV.4.2	Cas élastique : G_0 constant	116
IV.4.3	Cas thermoélastique : G_0 variable	118
IV.4.4	Cas viscoélastique : G_i constants	120
IV.4.5	Cas thermo-viscoélastique : G_i variables	122
IV.4.6	Comparaison des différents modèles de calcul	124
IV.5	Conclusion	126

IV.1 Introduction

LE CALCUL des contraintes dans un assemblage collé est un problème qui a donné naissance à de nombreux modèles plus ou moins complexes dans la littérature. La plupart de ces modèles sont basés sur l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire de chacun des éléments de l'assemblage. Cependant le comportement de la colle est fortement non-linéaire. Cette non-linéarité a été prise en compte dans certains modèles, qui tiennent compte par exemple de la viscoélasticité de la colle [BC90], de son élastoplasticité [AM92] ou encore de la non-linéarité de sa réponse à une sollicitation en fonction du niveau de chargement imposé [MS09]. La diversité des colles disponibles sur le marché et leurs conditions d'utilisations différentes (température, humidité, niveau de chargement, etc) expliquent l'absence d'un modèle fiable de comportement accepté et reconnu par tous. Dans le cadre de cette thèse, l'objectif est de modéliser le comportement non-linéaire de la colle en fonction du temps et de la température en s'appuyant sur les résultats expérimentaux présentés au chapitre III et sur une méthode de calcul de type itératif [JDV99].

Le comportement de la colle est donc modélisé ici par une loi de type Maxwell généralisée dont les paramètres évoluent en fonction de la température (cf. chapitre III). Il s'agit alors de modéliser la thermo-viscoélasticité de la colle en intégrant les variations des propriétés du matériau au cours du chargement. L'objet de ce chapitre est de présenter la méthode de calcul choisie pour inclure un tel comportement dans le calcul des contraintes dans un assemblage collé. Le chargement imposé à la structure est une variation homogène de la température en fonction du temps. A chaque instant, il faut tenir compte du vieillissement du matériau mais aussi des variations de ses propriétés en fonction de la température. Un calcul itératif est donc mené en discrétisant le chargement imposé en une série de petites variations thermiques et en calculant à chaque instant la nouvelle distribution des contraintes dans l'assemblage.

Plusieurs cas de chargements sont traités en faisant varier la vitesse et le sens de variation de la température. La méthode de calcul est alors évaluée dans des cas de complexité croissante et comparée à des calculs élastiques classiques. Les effets du temps et de la température sur le résultat sont alors découplés et analysés.

IV.2 Développement d'un modèle thermo-viscoélastique

IV.2.1 Géométrie et notations

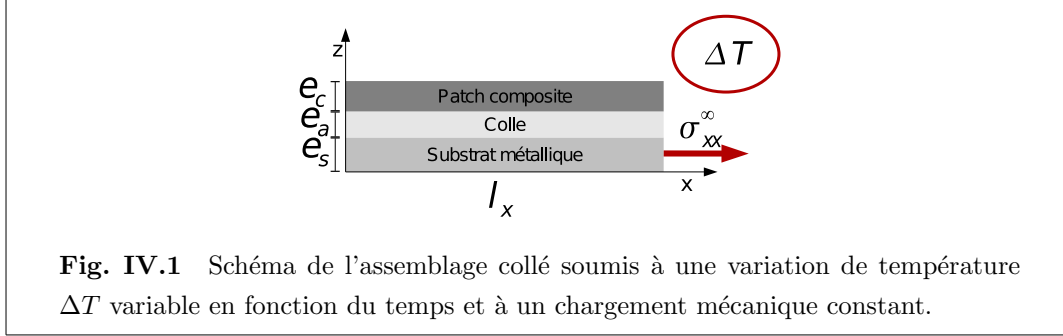


Fig. IV.1 Schéma de l'assemblage collé soumis à une variation de température ΔT variable en fonction du temps et à un chargement mécanique constant.

L'objectif de ce chapitre est de développer une méthode de calcul permettant de calculer les contraintes dans une structure collée unidirectionnelle. Le schéma de la structure étudiée est représenté sur la figure IV.1. Ce schéma correspond à la moitié supérieure d'une structure symétrique composée d'un substrat métallique, de deux couches de colle et de deux patches en matériau composite. La structure est supposée symétrique par rapport à l'axe x afin d'éviter toute flexion de l'assemblage. Contrairement au chapitre II, les effets liés aux coefficients de Poisson n'apparaissent pas ici. Il a été jugé préférable pour une première approche de commencer sur un simple modèle unidirectionnel pour comprendre les phénomènes liés uniquement au comportement de la colle. Le patch est supposé avoir une épaisseur constante, ce qui s'éloigne de la réalité puisqu'en général cette épaisseur est diminuée progressivement vers les bords. Cette hypothèse est donc pénalisante, mais elle présente l'avantage de donner un majorant du pic de contrainte dans la colle. Les notations suivantes sont utilisées :

- la longueur de l'assemblage est notée l_x ;
- l'épaisseur du patch composite, la demi-épaisseur du substrat et l'épaisseur d'une couche de colle sont notées respectivement e_c , e_s et e_a ;
- le comportement de la colle est modélisé par une loi de Maxwell généralisée, définie par les paramètres $\{G_i(T), \alpha_i\}$ définis au chapitre III ;
- les modules d'Young du substrat et du patch composite sont notés respectivement E_s et E_c ;
- les coefficients de dilatation du substrat et du patch sont notés α_s et α_c ;
- les contraintes longitudinales dans le patch composite et dans le substrat sont

- notées respectivement σ_{xx}^c et σ_{xx}^s ;
- la contrainte de cisaillement dans la colle est notée τ_{xz}^a ;
- l'ensemble est soumis à une variation homogène de température $T(t)$, variable en fonction du temps ;
- le substrat est soumis à un chargement mécanique constant σ_{xx}^∞ .

IV.2.2 Equations d'équilibre

Le schéma de l'assemblage collé est présenté sur la figure IV.1. Les équations d'équilibre du patch composite et du substrat à l'instant t_j s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} \tau_{xz}^a(x, t_j) &= e_c \frac{\partial \sigma_{xx}^c(x, t_j)}{dx} \\ -\tau_{xz}^a(x, t_j) &= e_s \frac{\partial \sigma_{xx}^s(x, t_j)}{dx} \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

En additionnant les équations (IV.1a) et (IV.1b), et en prenant $\sigma_{xx}^s(x = l_x, t) = \sigma_{xx}^\infty$, on obtient entre σ_{xx}^c et σ_{xx}^s la relation suivante :

$$\sigma_{xx}^s(x, t_j) = \sigma_{xx}^\infty - \frac{e_c}{e_s} \sigma_{xx}^c(x, t_j) \quad (\text{IV.2})$$

IV.2.3 Lois de comportement

Le substrat métallique et le patch composite sont supposés être linéaires élastiques. Leurs lois de comportement sont donc décrites respectivement par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^s(x, t_j) = \frac{1}{E_s} \sigma_{xx}^s(x, t_j) + \alpha_s (T(t_j) - T(t_0)) \\ \varepsilon_{xx}^c(x, t_j) = \frac{1}{E_c} \sigma_{xx}^c(x, t_j) + \alpha_c (T(t_j) - T(t_0)) \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

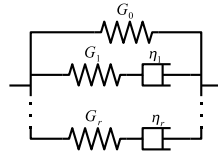


Fig. IV.2 Modèle de Maxwell utilisé, avec $\alpha_i = \frac{G_i}{\eta_i}$.

Le comportement de la colle est modélisé par une loi thermo-viscoélastique de type Maxwell généralisée, illustrée sur la figure IV.2 (cf. chapitre III). A l'instant t_j ,

le cisaillement dans la colle (τ_{xz}^a) se décompose en deux parties : le cisaillement de la branche élastique (τ_{xz}^0) et le cisaillement des branches viscoélastiques (τ_{xz}^μ , $\mu \geq 1$) :

$$\tau_{xz}^a(x, t_j) = \tau_{xz}^0(x, t_j) + \sum_{\mu=1}^r \tau_{xz}^\mu(x, t_j) \quad (\text{IV.4})$$

Contrairement à la méthode incrémentale présentée au paragraphe I.4.4.3 où la branche élastique est vue comme la limite d'un comportement viscoélastique, le calcul des contraintes dans chacune des branches s'effectue ici de deux manières différentes, en distinguant bien clairement la branche élastique des branches viscoélastiques. Ces calculs s'effectuent alors comme suit :

$$\begin{cases} \tau_{xz}^0(x, t_j) = G_0(t_j) \gamma_{xz}^a(x, t_j) \\ \tau_{xz}^\mu(x, t_j) = \int_0^{t_j} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j - \tau)} \frac{\partial \gamma_{xz}^a(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \mu = 1 \dots r \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Cette distinction des calculs induit que le cisaillement dans la branche élastique à l'instant t_j dépend uniquement des propriétés à cet instant alors que les cisaillements dans les branches viscoélastiques tiennent compte de tout l'historique du chargement. Il est alors possible d'utiliser cette approche incrémentale en se limitant à la simple branche élastique du modèle de Maxwell généralisé. Le résultat obtenu dans ce cas aboutit au même résultat qu'un calcul élastique classique. Au contraire, la méthode incrémentale présentée au paragraphe I.4.4.3 ne distingue pas les calculs dans les deux types de branches. De ce fait, le calcul des contraintes entre deux instants t_{j-1} et t_j , pour un modèle de Maxwell généralisé restreint à sa seule branche élastique, est basé sur les propriétés moyennes des matériaux entre ces deux instants, c'est-à-dire du module moyen entre t_{j-1} et t_j . Le résultat en t_j n'est donc pas identique au résultat donné par un calcul élastique.

IV.2.4 Ecriture du cisaillement dans la colle

Le cisaillement $\gamma_{xz}^a(x, t_j)$ dans la colle est supposé constant dans l'épaisseur du film de colle. Il est donc donné par :

$$\gamma_{xz}^a(x, t_j) = \frac{u_x^c(x, t_j) - u_x^s(x, t_j)}{e_a} \quad (\text{IV.6})$$

La dérivation par rapport à x de l'équation (IV.6) ci-dessus fait apparaître les déformations dans le substrat et dans le patch composite. Ces déformations sont

remplacées par leurs expressions en fonction des contraintes en utilisant les lois de comportement des matériaux données par l'équation (IV.3) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma_{xz}^a(x, t_j)}{\partial x} &= \frac{\varepsilon_{xx}^c(x, t_j) - \varepsilon_{xx}^s(x, t_j)}{e_a} \\
&= \frac{\sigma_{xx}^c(x, t_j)}{e_a E_c} + \frac{\alpha_c}{e_a} (T(t_j) - T(t_0)) - \frac{\sigma_{xx}^s(x, t_j)}{e_a E_s} - \frac{\alpha_s}{e_a} (T(t_j) - T(t_0)) \\
&= \frac{\alpha_c - \alpha_s}{e_a} (T(t_j) - T(t_0)) + \frac{\sigma_{xx}^c(x, t_j)}{e_a E_c} - \frac{1}{e_a E_s} (\sigma_{xx}^\infty - \frac{e_c}{e_s} \sigma_{xx}^c(x, t_j)) \\
&= \frac{\alpha_c - \alpha_s}{e_a} (T(t_j) - T(t_0)) - \frac{\sigma_{xx}^\infty}{e_a E_s} + \frac{e_c}{e_a} \sigma_{xx}^c(x, t_j) \left[\frac{1}{e_c E_c} + \frac{1}{e_s E_s} \right] \quad (\text{IV.7})
\end{aligned}$$

IV.2.5 Dérivation de l'équation d'équilibre dans le patch composite

En remplaçant l'expression de τ_{xz}^a par les équations (IV.4) et (IV.5) dans l'équation (IV.1a), il vient :

$$e_c \frac{\partial \sigma_{xx}^c(x, t_j)}{\partial x} = G_0(t_j) \gamma_{xz}^a(x, t_j) + \sum_{\mu=1}^r \int_0^{t_j} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j-\tau)} \frac{\partial \gamma_{xz}^a(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{IV.8})$$

La dérivation par rapport à x de l'équation (IV.8) fait apparaître le terme $\frac{\partial^2 \gamma_{xz}^a}{\partial \tau \partial x}$ qui est alors remplacé par $\frac{\partial^2 \gamma_{xz}^a}{\partial x \partial \tau}$ en application du théorème de Schwarz. $\frac{\partial \gamma_{xz}^a}{\partial x}$ est ensuite remplacé en utilisant l'équation (IV.7), ce qui donne successivement :

$$\begin{aligned}
e_c \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c(x, t_j)}{\partial x^2} &= G_0(t_j) \frac{\partial \gamma_{xz}^a(x, t_j)}{\partial x} \\
&+ \sum_{\mu=1}^r \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{t_j} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j-\tau)} \frac{\partial \gamma_{xz}^a(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \\
&= G_0(t_j) \frac{\partial \gamma_{xz}^a(x, t_j)}{\partial x} \\
&+ \sum_{\mu=1}^r \int_0^{t_j} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j-\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \gamma_{xz}^a(x, \tau)}{\partial x} d\tau \quad (\text{IV.9})
\end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture des équations, trois constantes A, S et F sont introduites.

Elles sont définies par :

$$\begin{cases} A &= \frac{\alpha_c - \alpha_s}{e_a e_c} \\ S &= \frac{1}{e_a E_s e_c} \sigma_{xx}^\infty \\ F &= \frac{1}{e_a} \left[\frac{1}{e_c E_c} + \frac{1}{e_s E_s} \right] \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

L'équation (IV.7) est alors simplifiée, ce qui permet d'écrire $\frac{\partial \gamma_{xz}^a}{\partial x}$ comme suit :

$$\frac{\partial \gamma_{xz}^a(x, t_j)}{\partial x} = e_c A (T(t_j) - T(t_0)) - e_c S + e_c F \sigma_{xx}^c(x, t_j) \quad (\text{IV.11})$$

L'équation (IV.9) est alors réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c(x, t_j)}{\partial x^2} &= G_0(t_j) [A(T(t_j) - T(t_0)) - S + F \sigma_{xx}^c(x, t_j)] \\ &+ \sum_{\mu=1}^r \int_0^{t_j} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j - \tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} [A(T(\tau) - T(t_0)) - S + F \sigma_{xx}^c(x, \tau)] d\tau \\ &= G_0(t_j) [A(T(t_j) - T(t_0)) - S + F \sigma_{xx}^c(x, t_j)] \\ &+ \sum_{\mu=1}^r \int_0^{t_j} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j - \tau)} \left[A \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + F \frac{\partial \sigma_{xx}^c(x, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

car le chargement mécanique σ_{xx}^∞ est supposé être constant ici, donc S également. De ce fait, $\frac{dS}{d\tau} = 0$.

En posant $\kappa_\mu(x, t_j) = \int_0^{t_j} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j - \tau)} \left[A \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + F \frac{\partial \sigma_{xx}^c(x, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau$, il vient :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c(x, t_j)}{\partial x^2} = G_0(t_j) [A(T(t_j) - T(t_0)) - S + F \sigma_{xx}^c(x, t_j)] + \sum_{\mu=1}^r \kappa_\mu(x, t_j) \quad (\text{IV.13})$$

IV.2.6 Calcul de $\kappa_\mu(x, t_j)$

Le calcul de $\kappa_\mu(x, t_j)$ à l'instant t_j est donc basé sur une intégration entre l'instant initial t_0 et l'instant t_j . Cela nécessite de stocker l'historique de chargement. L'objectif est ici de décomposer cette intégrale afin de faire apparaître le terme $\kappa_\mu(x, t_{j-1})$. Cette décomposition permet d'obtenir la solution à l'instant t_j en fonction de celle calculée à un instant précédent t_{j-1} , ce qui donne successivement :

$$\begin{aligned}
\kappa_\mu(x, t_j) &= \int_0^{t_j} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j-\tau)} \left[A \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + F \frac{\partial \sigma_{xx}^c(x, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \\
\kappa_\mu(x, t_j) &= \int_0^{t_{j-1}} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j-\tau)} \left[A \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + F \frac{\partial \sigma_{xx}^c(x, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \\
&+ \int_{t_{j-1}}^{t_j} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j-\tau)} \left[A \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + F \frac{\partial \sigma_{xx}^c(x, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \\
\kappa_\mu(x, t_j) &= \exp^{-\alpha_\mu(t_j-t_{j-1})} \int_0^{t_{j-1}} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_{j-1}-\tau)} \left[A \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + F \frac{\partial \sigma_{xx}^c(x, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \\
&+ \int_{t_{j-1}}^{t_j} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j-\tau)} \left[A \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + F \frac{\partial \sigma_{xx}^c(x, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \\
\kappa_\mu(x, t_j) &= \exp^{-\alpha_\mu(t_j-t_{j-1})} \kappa_\mu(x, t_{j-1}) + AI_1^\mu(t_{j-1}, t_j) + FI_2^\mu(t_{j-1}, t_j)
\end{aligned} \tag{IV.14}$$

avec :

$$\begin{cases} I_1^\mu(t_{j-1}, t_j) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j-\tau)} \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\ I_2^\mu(t_{j-1}, t_j) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} G_\mu(\tau) \exp^{-\alpha_\mu(t_j-\tau)} \frac{\partial \sigma_{xx}^c(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \end{cases} \tag{IV.15}$$

Le calcul de $\kappa_\mu(x, t_j)$ à l'instant t_j nécessitait auparavant une intégration entre les instants t_0 et t_j . Après décomposition de cette intégrale, seules les évolutions de la température $T(t)$, de la distribution de contrainte $\sigma_{xx}^c(x, t)$ dans le patch et des paramètres G_μ du modèle de Maxwell généralisé entre les instants t_{j-1} et t_j sont nécessaires pour ce calcul. Le calcul de $\kappa_\mu(x, t_j)$ nécessite maintenant l'évaluation de deux intégrales très similaires $I_1^\mu(t_{j-1}, t_j)$ et $I_2^\mu(t_{j-1}, t_j)$.

IV.2.7 Calcul des intégrales $I_1^\mu(t_{j-1}, t_j)$ et $I_2^\mu(t_{j-1}, t_j)$

Seuls les détails concernant $I_1^\mu(t_{j-1}, t_j)$ sont donnés étant donnée la forte similitude entre les deux intégrales à calculer.

IV.2.7.1 Calcul de l'intégrale $I_1^\mu(t_{j-1}, t_j)$

Afin de pouvoir calculer l'intégrale I_1^μ , les fonctions G_μ et T sont supposées linéaires sur l'intervalle $[t_{j-1}, t_j]$. Elles s'écrivent donc de la manière suivante :

$$\begin{cases} G_\mu(\tau) = \frac{G_\mu(t_j) - G_\mu(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}(\tau - t_{j-1}) + G_\mu(t_{j-1}) \\ T(\tau) = \frac{T(t_j) - T(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}(\tau - t_{j-1}) + T(t_{j-1}) \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

Le calcul de I_1^μ donne alors :

$$I_1^\mu(t_{j-1}, t_j) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[\frac{G_\mu(t_j) - G_\mu(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}(\tau - t_{j-1}) + G_\mu(t_{j-1}) \right] \exp^{-\alpha_\mu(t_j - \tau)} \frac{T(t_j) - T(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} d\tau \quad (\text{IV.17})$$

ou encore, en réorganisant les termes :

$$\begin{aligned} I_1^\mu(t_{j-1}, t_j) &= \frac{T(t_j) - T(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[\frac{G_\mu(t_j) - G_\mu(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}(\tau - t_{j-1}) + G_\mu(t_{j-1}) \right] \exp^{-\alpha_\mu(t_j - \tau)} d\tau \\ &= \frac{T(t_j) - T(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \left[\frac{G_\mu(t_j) - G_\mu(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\tau - t_{j-1}) \exp^{-\alpha_\mu(t_j - \tau)} d\tau \right. \\ &\quad \left. + G_\mu(t_{j-1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \exp^{-\alpha_\mu(t_j - \tau)} d\tau \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

Ce qui donne finalement, après calcul des intégrales :

$$\begin{aligned} I_1^\mu(t_{j-1}, t_j) &= \frac{T(t_j) - T(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \left[\frac{G_\mu(t_j) - G_\mu(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \frac{-1 + \alpha_\mu(t_j - t_{j-1}) + \exp^{-\alpha_\mu(t_j - t_{j-1})}}{\alpha_\mu^2} \right. \\ &\quad \left. + G_\mu(t_{j-1}) \frac{1 - \exp^{-\alpha_\mu(t_j - t_{j-1})}}{\alpha_\mu} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

IV.2.7.2 Calcul de l'intégrale $I_2^\mu(t_{j-1}, t_j)$

D'une façon similaire, le calcul de l'intégrale $I_2^\mu(t_{j-1}, t_j)$ aboutit au résultat suivant :

$$\begin{aligned} I_2^\mu(t_{j-1}, t_j) &= \frac{\sigma_{xx}^c(x, t_j) - \sigma_{xx}^c(x, t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \left[\frac{G_\mu(t_j) - G_\mu(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \frac{-1 + \alpha_\mu(t_j - t_{j-1}) + \exp^{-\alpha_\mu(t_j - t_{j-1})}}{\alpha_\mu^2} \right. \\ &\quad \left. + G_\mu(t_{j-1}) \frac{1 - \exp^{-\alpha_\mu(t_j - t_{j-1})}}{\alpha_\mu} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

IV.2.8 Réécriture de l'équation différentielle régissant $\sigma_{xx}^c(x, t_j)$

Connaissant maintenant $I_1^\mu(t_{j-1}, t_j)$ et $I_2^\mu(t_{j-1}, t_j)$, il est possible de réécrire $\kappa_\mu(x, t_j)$. Afin d'alléger les équations, les notations suivantes sont introduites :

$$\begin{cases} \Delta t = t_j - t_{j-1} \\ \Delta T = T(t_j) - T(t_{j-1}) \\ \Delta G_\mu = G_\mu(t_j) - G_\mu(t_{j-1}) \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

L'équation (IV.13) est réécrite en remplaçant $\kappa_\mu(x, t_j)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c(x, t_j)}{\partial x^2} &= G_0(t_j) [A(T(t_j) - T(t_0)) - S + F\sigma_{xx}^c(x, t_j)] \\ &+ \sum_{\mu=1}^r \kappa_\mu(x, t_j) \\ &= G_0(t_j) [A(T(t_j) - T(t_0)) - S + F\sigma_{xx}^c(x, t_j)] \\ &+ \sum_{\mu=1}^r \exp^{-\alpha_\mu(t_j - t_{j-1})} \kappa_\mu(x, t_{j-1}) + AI_1^\mu(t_{j-1}, t_j) + FI_2^\mu(t_{j-1}, t_j) \\ &= G_0(t_j) [A(T(t_j) - T(t_0)) - S + F\sigma_{xx}^c(x, t_j)] \\ &+ \sum_{\mu=0}^r \exp^{-\alpha_\mu \Delta t} \kappa_\mu(x, t_{j-1}) \\ &+ A \frac{\Delta T}{\Delta t} \sum_{\mu=1}^r \left[\frac{\Delta G_\mu - 1 + \alpha_\mu \Delta t + \exp^{-\alpha_\mu \Delta t}}{\alpha_\mu^2} + G_\mu(t_{j-1}) \frac{1 - \exp^{-\alpha_\mu \Delta t}}{\alpha_\mu} \right] \\ &+ F \frac{\sigma_{xx}^c(x, t_j) - \sigma_{xx}^c(x, t_{j-1})}{\Delta t} \sum_{\mu=1}^r \left[\frac{\Delta G_\mu - 1 + \alpha_\mu \Delta t + \exp^{-\alpha_\mu \Delta t}}{\alpha_\mu^2} \right. \\ &\quad \left. + G_\mu(t_{j-1}) \frac{1 - \exp^{-\alpha_\mu \Delta t}}{\alpha_\mu} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

La somme $S_2(t_{j-1}, t_j)$ est introduite, elle est définie par :

$$S_2(t_{j-1}, t_j) = \sum_{\mu=1}^r \left[\frac{\Delta G_\mu - 1 + \alpha_\mu \Delta t + \exp^{-\alpha_\mu \Delta t}}{\alpha_\mu^2} + G_\mu(t_{j-1}) \frac{1 - \exp^{-\alpha_\mu \Delta t}}{\alpha_\mu} \right] \quad (\text{IV.23})$$

L'équation (IV.22) est finalement simplifiée en utilisant l'équation (IV.23), ce qui aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c(x, t_j)}{\partial x^2} &- F \left[\frac{S_2(t_{j-1}, t_j)}{\Delta t} + G_0(t_j) \right] \sigma_{xx}^c(x, t_j) \\ &= \sum_{\mu=1}^r \exp^{-\alpha_\mu \Delta t} \kappa_\mu(x, t_{j-1}) \\ &+ A \frac{\Delta T}{\Delta t} S_2(t_{j-1}, t_j) + G_0(t_j) [A(T(t_j) - T(t_0)) - S] - \frac{FS_2(t_{j-1}, t_j)}{\Delta t} \sigma_{xx}^c(x, t_{j-1}) \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

La distribution des contraintes $\sigma_{xx}^c(x, t_j)$ à l'instant t_j est donc obtenue par la résolution d'une équation différentielle dont le second membre dépend directement de la distribution des contraintes $\sigma_{xx}^c(x, t_{j-1})$ à l'instant précédent. Le calcul est donc mené par itérations temporelles successives en calculant successivement les distributions en t_1, t_2, t_3 en fonction des distributions à l'instant précédent et de l'évolution des paramètres matériaux entre ces deux instants.

IV.2.9 Résolution par itérations de $\sigma_{xx}^c(x, t_j)$

IV.2.9.1 Initialisation en t_0

La distribution des contraintes dans le patch composite suivant x à l'instant initial t_0 est donnée par $\sigma_{xx}^c(x, t_0)$. Elle peut être connue à l'avance, par exemple suite à un calcul de contraintes résiduelles. Dans notre cas, elle est supposée nulle : $\sigma_{xx}^c(x, t_0) = 0$.

Dans chaque branche μ , le calcul de $\kappa_\mu(x, t_0)$ donné par l'équation (IV.14) aboutit à $\kappa_\mu(x, t_0) = 0$.

Le chargement imposé est une évolution de la température T au cours du temps t . A chaque instant, les paramètres matériaux G_μ sont donc connus en interpolant, linéairement ici, les valeurs obtenues pour les G_μ au chapitre III.

La série $S_2(t_0, t_1)$, définie dans l'équation (IV.23) peut donc être calculée puisqu'elle ne dépend que de paramètres connus en t_0 et en $t_1 : t_0, t_1, \alpha_\mu, G_\mu(t_0), G_\mu(t_1)$.

L'équation (IV.24) à l'instant $t_1 = t_0 + \Delta t$ permettant de calculer la distribution des contraintes à l'instant t_1 s'écrit donc de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c(x, t_1)}{\partial x^2} - F \left[\frac{S_2(t_0, t_1)}{\Delta t} + G_0(t_1) \right] \sigma_{xx}^c(x, t_1) \\ = A \frac{\Delta T}{\Delta t} S_2(t_0, t_1) + G_0(t_1) [A(T(t_1) - T(t_0)) - S] \end{aligned} \quad (IV.25)$$

Tous les coefficients de cette équation sont connus puisqu'ils dépendent des propriétés de la colle et du chargement aux instant t_0 et t_1 . L'inconnue de cette équation est donc la distribution des contraintes en t_1 . La solution de cette équation différentielle du second ordre est obtenue numériquement, en utilisant une méthode matricielle comme celle qui est décrite dans [Nou93] et détaillée en annexe A.1. Les conditions aux limites permettant la résolution de cette équation sont obtenues par l'hypothèse des contraintes nulles au niveau des extrémités du patch, donc :

$$\sigma_{xx}^c(x = 0, t_j) = \sigma_{xx}^c(x = l_x, t_j) = 0 \quad (IV.26)$$

La distribution de $\sigma_{xx}^c(x, t_1)$ est alors déterminée, ce qui permet de calculer $\kappa_\mu(x, t_1)$ en utilisant l'équation (IV.14).

IV.2.9.2 Passage de t_{j-1} à t_j

À l'instant t_{j-1} les distributions $\sigma_{xx}^c(x, t_{j-1})$ et $\kappa_\mu(x, t_{j-1})$ sont supposées connues. Lors du passage de t_{j-1} à t_j , les paramètres T , G_μ , $S_2(t_{j-1}, t_j)$ sont connus également puisqu'ils dépendent uniquement de la température en t_{j-1} et en t_j . Il est alors possible d'écrire l'équation différentielle régissant la distribution des contraintes à l'instant t_j , donnée par l'équation différentielle (IV.24). La résolution numérique de cette équation permet donc de trouver $\sigma_{xx}^c(x, t_j)$. Enfin, les distributions $\kappa_\mu(x, t_j)$ sont déterminées en utilisant l'équation (IV.14). Ce procédé est appliqué de manière itérative afin de calculer à chaque instant la nouvelle distribution des contraintes dans le patch composite en fonction de la distribution à l'instant précédent. Il n'est alors pas nécessaire de stocker tout l'historique des résultats, ce qui est un gros avantage.

IV.3 Remarques sur le calcul

IV.3.1 Comparaison avec un calcul élastique

Si le comportement de la colle est réduit à sa seule branche élastique, les simplifications suivantes peuvent être faites :

$$\begin{cases} S_2(t_{j-1}, t_j) = 0 \\ \sum_{\mu=1}^r \exp^{-\alpha_\mu \Delta t} \kappa_\mu(x, t_{j-1}) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

L'équation différentielle (IV.24) se limite alors à :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c(x, t_j)}{\partial x^2} - FG_0(t_j) \sigma_{xx}^c(x, t_j) = AG_0(t_j) (T(t_j) - T(t_0)) \quad (\text{IV.28})$$

Cette équation est donc identique à celle obtenue dans le cadre d'une étude classique de joint collé (cf. équations (I.1) et (I.2)) dont la solution est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^c(x, t_j) = \frac{A}{F} (T(t_j) - T(t_0)) & \left[\cosh \left(\sqrt{FG_0(t_j)} x \right) \right. \\ & \left. + \frac{1 - \cosh \left(\sqrt{FG_0(t_j)} l_x \right)}{\sinh \left(\sqrt{FG_0(t_j)} l_x \right)} \sinh \left(\sqrt{FG_0(t_j)} x \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

La distribution du cisaillement τ_{xz}^a dans la colle est alors obtenue par dérivation de la contrainte σ_{xx}^c dans le patch :

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^a(x, t_j) &= e_c \frac{\partial \sigma_{xx}^c(x, t_j)}{\partial x} \\ &= e_c \frac{A\sqrt{FG_0(t_j)}}{F} (T(t_j) - T(t_0)) \left[\sinh(\sqrt{FG_0(t_j)}x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \cosh(\sqrt{FG_0(t_j)}l_x)}{\sinh(\sqrt{FG_0(t_j)}l_x)} \cosh(\sqrt{FG_0(t_j)}x) \right]\end{aligned}\quad (\text{IV.30})$$

Le pic de cisaillement $\tau_{xz}^{a,max}$ dans la colle est obtenu en $x = 0$. Il est donné par :

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{a,max}(x, t_j) &= \tau_{xz}^a(x = 0, t_j) \\ &= e_c \frac{A\sqrt{FG_0(t_j)}}{F} (T(t_j) - T(t_0)) \frac{1 - \cosh(\sqrt{FG_0(t_j)}l_x)}{\sinh(\sqrt{FG_0(t_j)}l_x)}\end{aligned}\quad (\text{IV.31})$$

Cette dernière équation sera utilisée dans la suite de l'étude pour comparer les résultats obtenus avec la méthode de calcul développée dans ce chapitre et ceux obtenus classiquement pour des lois de comportement linéaires élastiques.

IV.3.2 Convergence temporelle

Sur chaque intervalle $[t_{j-1}, t_j]$, des hypothèses sont émises pour permettre le calcul des intégrales I_1 et I_2 , notamment celle d'une évolution linéaire des paramètres T et G_μ . Un saut de température trop grand entre deux pas de calcul mène donc à une mauvaise estimation du champ de contraintes à un instant donné, et se répercute ensuite aux instants suivants. Il faut donc discrétiser suffisamment le calcul afin de vérifier cette hypothèse sur chaque intervalle. Pour cela, plusieurs calculs peuvent être menés en affinant la discrétisation temporelle jusqu'à stabilisation de la solution obtenue.

Un exemple d'évolution du pic de cisaillement obtenu dans la colle en fonction de la discrétisation temporelle est présenté sur la figure IV.3. Dans une première approche, le chargement imposé est une variation exponentielle de la température. Ce type de chargement a été choisi pour les exemples traités dans les paragraphes suivants car il correspond à la variation de la température d'une structure initialement à la température T_0 plongée dans un milieu à la température T_∞ . La température passe ici de -50°C à 70°C en quelques secondes. Le pas de temps Δt est constant.

Les valeurs testées pour Δt s'échelonnent entre 10 s et 35 ms. La valeur obtenue n'évolue plus lorsque Δt devient inférieur à 200 ms, ce qui correspond dans ce cas à une variation de température de 22 °C au maximum entre deux pas de temps successifs.

Afin d'optimiser la durée du calcul, la discrétisation temporelle n'est pas nécessairement régulière. Il est plus intéressant d'affiner le calcul là où les variations de température sont les plus grandes. Dans les calculs suivants, la durée entre deux instants de calcul est donc déterminée en fonction du chargement thermique appliqué à partir de plusieurs conditions :

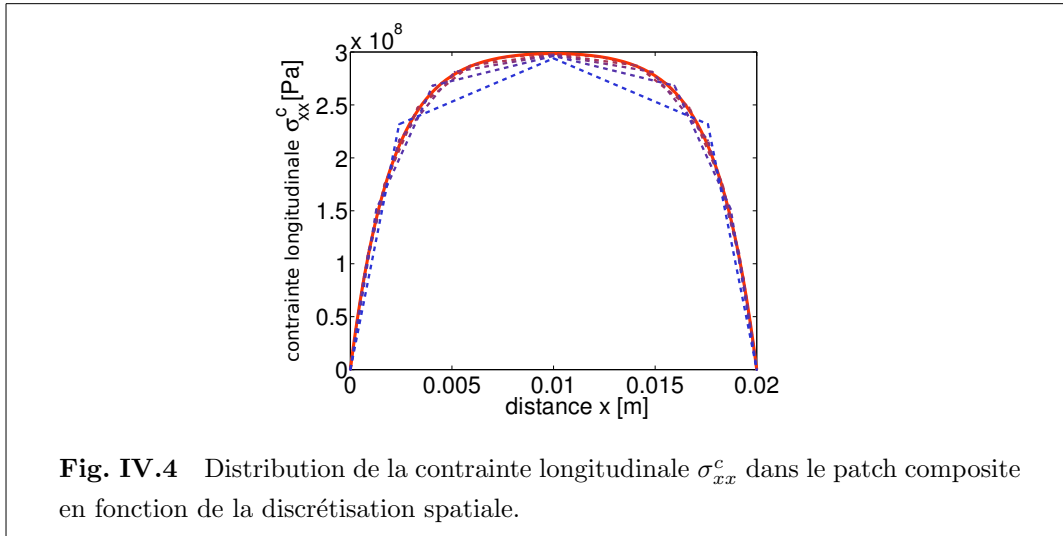
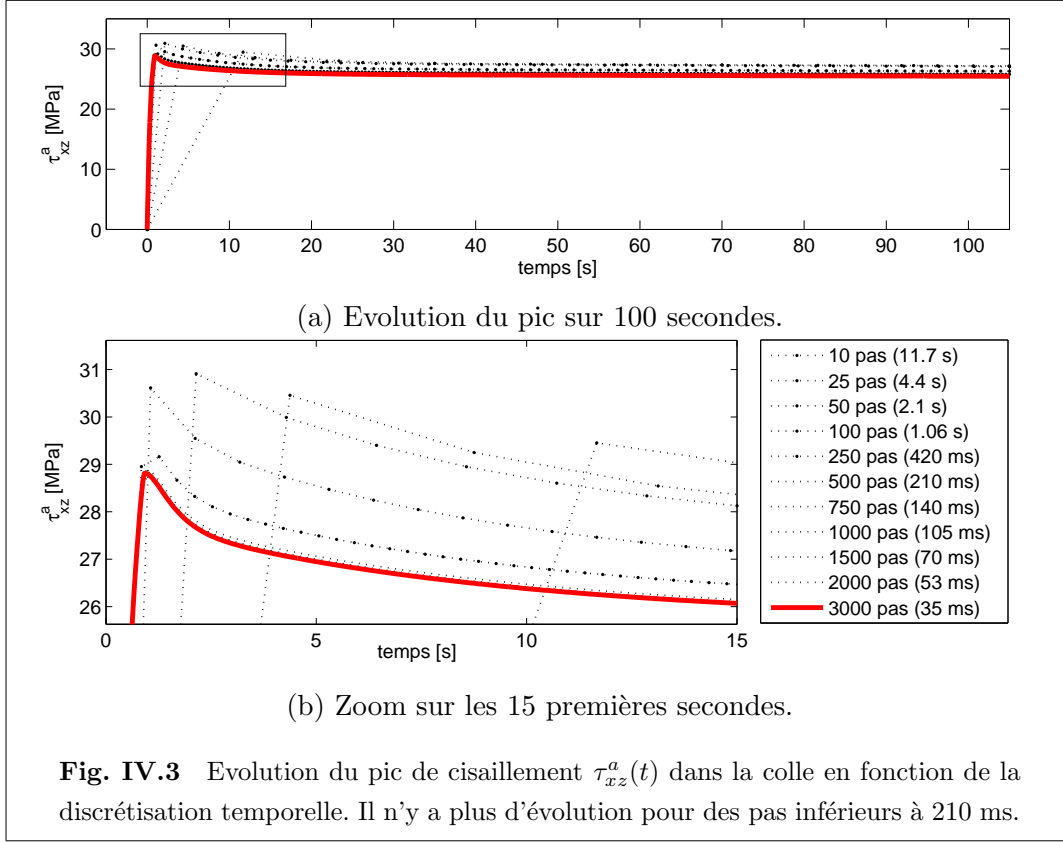
- la variation de température entre deux instants successifs doit être inférieure à ΔT_{max} ;
- la durée maximale Δt_{max} entre deux instants successifs doit être inférieure à une fraction du plus petit temps de retard du modèle de Maxwell.

Le choix de chacun de ces paramètres doit faire l'objet d'une étude de convergence. Pour les calculs présentés dans la suite, ils ont finalement été fixés à 1 °C pour ΔT_{max} et à 20% du plus petit temps de relaxation $1/\alpha_i$ pour Δt_{max} .

IV.3.3 Convergence spatiale

La résolution numérique de la distribution $\sigma_{xx}^c(x, t_j)$ permet d'obtenir, par dérivation spatiale suivant x , le cisaillement dans la colle. L'évaluation du pic de cisaillement dans la colle au niveau du bord libre nécessite donc de disposer d'un maillage fin à ce niveau. Un exemple d'évolution de $\sigma_{xx}^c(x, t_j)$ en fonction de la discrétisation spatiale est présenté sur la figure IV.4

La contrainte longitudinale au milieu du patch est donc correctement évaluée quel que soit le niveau de raffinement du maillage, par contre la dérivée au niveau des extrémités du patch est sous-estimée en cas de maillage trop grossier. Le maillage utilisé dans les calculs présentés dans la suite de l'étude n'est donc pas linéaire mais affiné près des bords, ceci pour optimiser le temps de calcul et l'espace mémoire utilisé pour la résolution numérique.



IV.4 Application de la solution

IV.4.1 Description du chargement appliqué

Dans cette partie, plusieurs cas de figure sont testés pour évaluer les différents effets liés au comportement thermo-viscoélastique de la colle. Ces cas sont traités dans un ordre de complexité croissante pour deux chargements thermiques : le passage de la température de -50 °C à 70 °C , puis le passage de 70 °C à -50 °C . La variation de température est supposée suivre une loi exponentielle du type :

$$T(t) = T_0 + (T_\infty - T_0) \left(1 - e^{-t/\beta}\right) \quad (\text{IV.32})$$

qui correspond à la variation de température d'une structure initialement à T_0 plongée dans un milieu à T_∞ . T_0 et T_∞ représentent respectivement la température à l'instant initial et la température finale. Plusieurs valeurs de β permettent de faire varier la vitesse de variation de la température et ainsi tester l'évolution de ce paramètre sur la réponse du matériau. Cinq valeurs sont testées pour β : 1 s, 5 s, 20 s, 60 s et 180 s. Des calculs effectués pour ces vitesses de chargement en utilisant le modèle à cinq branches viscoélastiques donné dans le tableau III.3 ont aboutit à des résultats très proches de ceux obtenus avec le modèle à deux branches du tableau III.2. Pour des raisons de temps de calcul, les résultats présentés dans la suite de l'étude sont obtenus en considérant simplement un modèle à deux branches.

Différents cas de complexité croissante sont traités dans les paragraphes suivants :

- le cas élastique : seule une branche élastique est prise en compte dans le calcul et $G_0(T)$ est supposé constant. Ce premier cas permettra de comparer la méthode de calcul avec un calcul élastique classique ;
- le cas thermoélastique : seul $G_0(T)$ est pris en compte dans le calcul. Il peut cette fois varier ce qui permettra de mettre en valeur des effets liés à l'évolution des paramètres de la colle en fonction de la température ;
- le cas viscoélastique : toutes les branches, élastique et viscoélastiques, sont intégrées au calcul mais les paramètres sont supposés être constants en fonction de la température. Ce cas permettra de visualiser des effets liés au temps et en particulier à la vitesse du chargement ;
- le cas thermo-viscoélastique : tous les paramètres de toutes les branches évoluent en fonction de la température. Ce cas permettra de visualiser l'évolution des contraintes dans l'assemblage pour une loi de comportement plus réaliste.

Pour chaque cas traité, le calcul incrémental développé ici est comparé aux résultats que donneraient deux calculs élastiques classiques basés sur l'équation (IV.31). L'un pour lequel on ne considère que l'apport de la branche élastique dont le module de cisaillement est donné par $G_0(T)$, l'autre pour lequel on considère l'apport de toutes les branches, donc dans ce cas le module de cisaillement de la colle est donné par $\sum G_i(T)$. Pour les cas où les paramètres sont supposés constants en fonction de la température, c'est leur valeur à -50 °C qui est utilisée.

Les valeurs choisies pour les paramètres géométriques et matériaux sont listées ci-dessous. Les paramètres du patch composite sont extraits de [TH80] et correspondent à un patch unidirectionnel en carbone/époxyde :

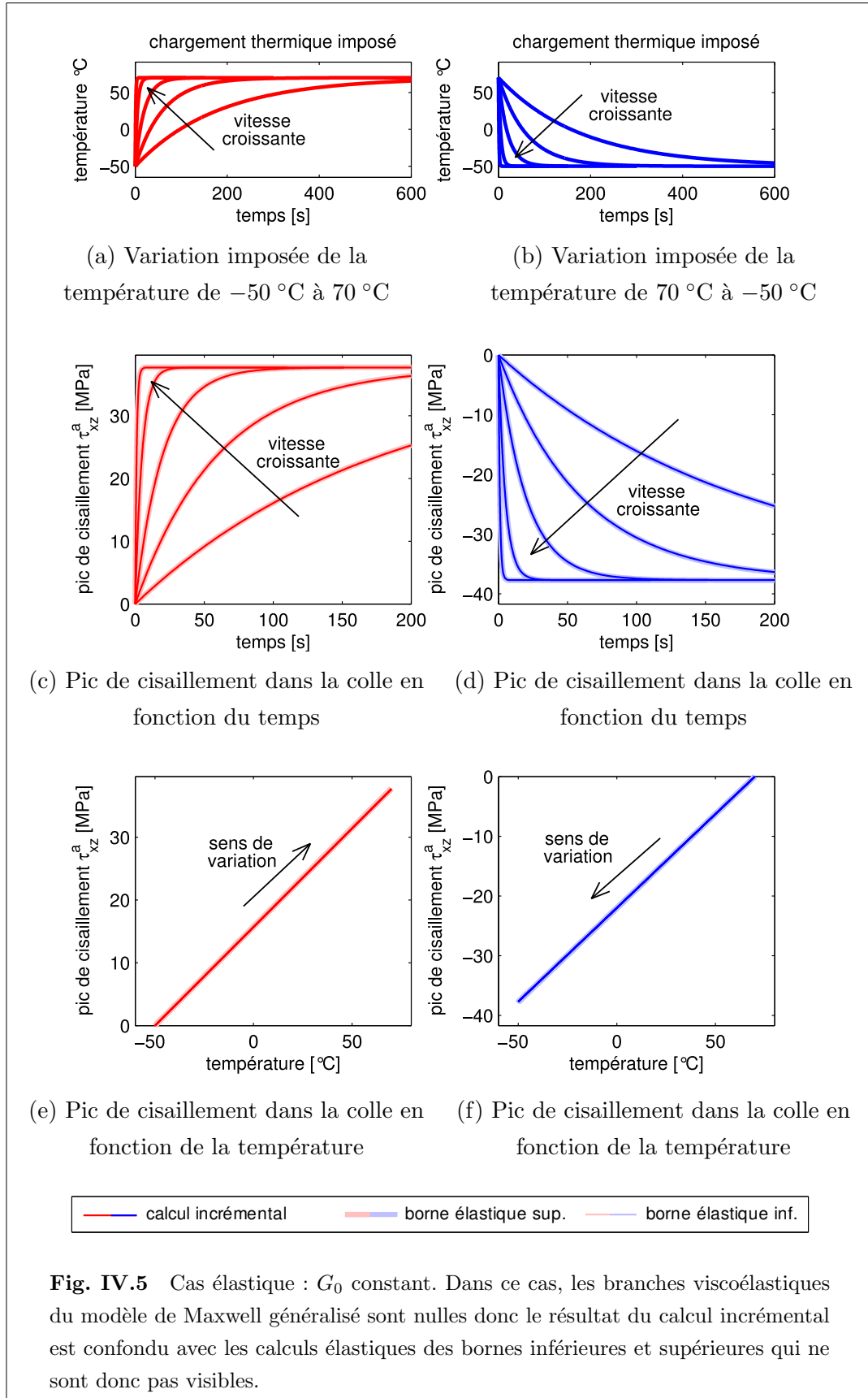
$$\left\{ \begin{array}{l} l_x = 20 \text{ mm} \\ e_c = 0.25 \text{ mm} \\ e_a = 0.15 \text{ mm} \\ e_s = 1 \text{ mm} \\ E_c = 181 \text{ GPa} \\ E_s = 73.8 \text{ GPa} \\ \alpha_c = 0.02 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1} \\ \alpha_s = 22.5 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1} \end{array} \right. \quad (\text{IV.33})$$

IV.4.2 Cas élastique : G_0 constant

Dans ce premier cas, seule la branche élastique est prise en compte et la valeur de $G_0(T)$ est supposée constante par rapport à la température. Le module élastique à -50 °C est utilisé ici. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure IV.5.

Les chargements thermiques imposés (deux sens de variation et cinq vitesses de chargement) sont représentés sur les figures IV.5(a-b). L'évolution du pic de cisaillement dans la colle en fonction du temps est représentée sur la figure IV.5(c) pour les augmentations de température, et sur la figure IV.5(d) pour les baisses de température. De même, l'évolution du pic de cisaillement en fonction de la température est représentée sur les figures IV.5(e-f), respectivement pour les augmentations et les diminutions de température.

Chaque calcul mené avec la méthode incrémentale décrite précédemment est comparé avec deux calculs élastiques (cf. équation (IV.31)) : l'un pour lequel seule le module élastique G_0 est prise en compte et l'autre en considérant que toutes les branches sont élastiques, donc en prenant $\sum G_i$ comme module élastique.



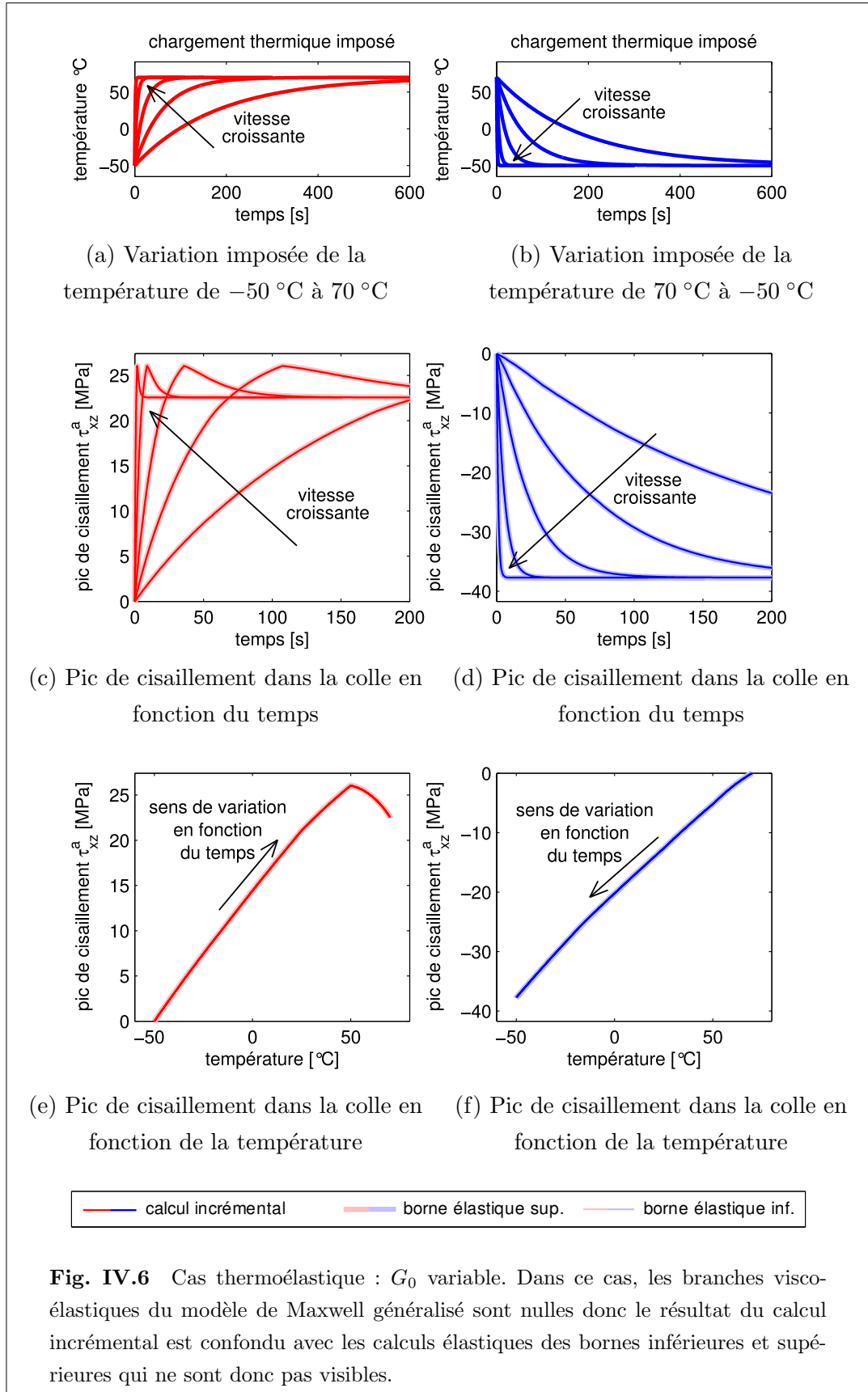
Dans ce cas particulier, comme $G_1 = G_2 = 0$, les bornes inférieures (obtenues pour G_0) et supérieures (obtenues pour $\sum G_i$) sont identiques. Les courbes obtenues par le calcul incrémental et par les deux calculs élastiques sont donc superposées. De plus, les branches viscoélastiques étant négligées dans ce calcul, le résultat ne dépend pas de la vitesse de chargement mais uniquement de la température. Toutes les courbes tracées en fonction de la température sont donc superposées (cf. figures IV.5(e-f)). Il faut noter également que le module G_0 étant constant, le pic de contrainte donné par le calcul élastique est une fonction linéaire de la variation de température imposée ($T(t_j) - T(t_0)$) (cf. équation (IV.31)). Ceci correspond bien aux courbes représentées en fonction de la température, où le pic de cisaillement évolue linéairement. Il faut noter également que le résultat donné par la méthode incrémentale est obtenu par résolutions numériques successives, par différences finies, d'une équation différentielle dont la solution exacte est connue dans ce cas particulier et qui est donnée par l'équation (IV.31). Comme expliqué au paragraphe IV.3.3, la résolution par différences finies sous-estime le pic de cisaillement au niveau du bord libre lorsque la discrétisation est trop grossière. Les courbes du calcul incrémental et celles du calcul élastique sont bien superposées ici, le maillage utilisé est donc suffisamment fin.

En conclusion, lorsque les paramètres de la colle sont limités à ceux d'un comportement élastique, la méthode de calcul décrite précédemment donne bien les valeurs obtenues par un calcul linéaire élastique classique [HS73a].

IV.4.3 Cas thermoélastique : G_0 variable

Le cas d'un comportement thermoélastique pour la colle est modélisé en prenant en compte l'évolution du paramètre $G_0(T)$ en fonction de la température et en négligeant l'apport des branches viscoélastiques dans le calcul. Les chargements appliqués sont les mêmes que précédemment. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure IV.6. Ces résultats amènent les remarques suivantes :

- seule la branche élastique G_0 est prise en compte, donc comme précédemment, les résultats des calculs élastiques classiques donnant les bornes inférieures et supérieures du calcul viscoélastique sont confondus avec le calcul viscoélastique lui-même ;
- le calcul est élastique, donc les résultats obtenus ne dépendent que de la température en cours et pas de la vitesse de chargement. Les courbes représentées sur les figures IV.6(e-f) sont donc superposées ;
- comme le module $G_0(T)$ varie en fonction de la température, le pic de cisaille-



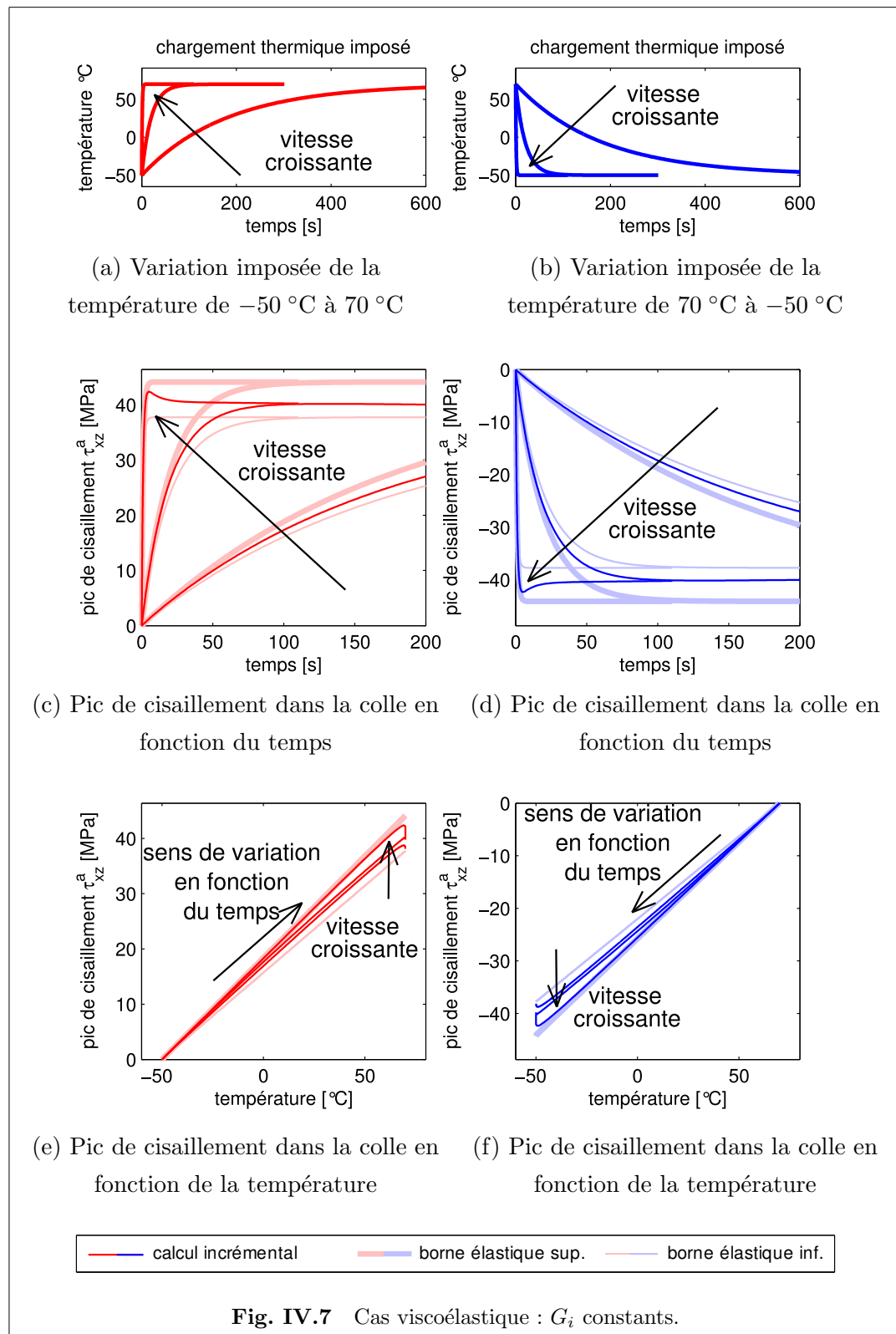
ment n'est plus une fonction linéaire de la température, comme cela est visible sur les figures IV.6(e-f). D'autre part, G_0 étant plus élevé aux basses températures, la valeur asymptotique du pic de cisaillement obtenu dans chacun des cas est plus élevée lorsque la température diminue : 38 MPa contre 23 MPa lorsque la température augmente. Les résultats obtenus ne sont alors plus symétriques par rapport au sens de variation de la température ;

- les effets cumulés de la variation de température et de la variation du module G_0 ne vont pas toujours dans le même sens. En effet, lorsque la température diminue (cf. figures IV.6(d,f)), la différence entre la température en cours et la température initiale augmente et le module de cisaillement de la colle augmente. Ces deux effets combinés provoquent une augmentation régulière du pic de cisaillement. Par contre, lorsque la température augmente (cf. figures IV.6(c,e)), ces effets ont des influences opposées sur la valeur du pic : l'écart de température se creuse mais le module G_0 de la colle diminue. Il y a donc ici apparition d'une température critique au delà de laquelle la chute du module G_0 compense la variation de température appliquée. Dans le cas présent, au delà de 50 °C, le pic de cisaillement chute ;
- en ce qui concerne le chargement positif de +120 °C, un calcul élastique basé sur les propriétés à l'instant final donc à +70 °C donnerait un pic de 22 MPa qui serait obtenu à +70 °C. Le modèle thermoélastique prévoit un pic à +50 °C de 26 MPa . Un calcul basé sur les propriétés finales du matériau sous-estimerait donc la contrainte maximale de 15%. Le comportement thermoélastique de la colle n'est donc pas négligeable dans ce cas.

IV.4.4 Cas viscoélastique : G_i constants

Le cas d'un comportement viscoélastique de la colle est traité maintenant. Les trois branches du tableau III.2 sont donc considérées mais en supposant que les modules $G_i(T)$ sont constants en fonction de la température. Les résultats sont présentés sur la figure IV.7. Pour des raisons de lisibilité, seuls les résultats obtenus pour $\beta = 1$ s, 20 s et 180 s sont représentés.

Le calcul viscoélastique est borné par les résultats obtenus par deux calculs élastiques classiques de joint collé. La borne inférieure, en traits fins sur les figures IV.7(c-f), est déterminée en ne prenant en compte dans le calcul que le module élastique de la colle. C'est vers cette solution que le calcul viscoélastique converge pour une durée infinie. La borne supérieure, en traits gras sur les figures IV.7(c-f), est obtenue en



additionnant les modules de toutes les branches du modèle de Maxwell et en supposant qu'il n'y a pas de relaxation de ces modules. Cette borne est atteinte pour des vitesses très élevées de variation de la température en début de chargement.

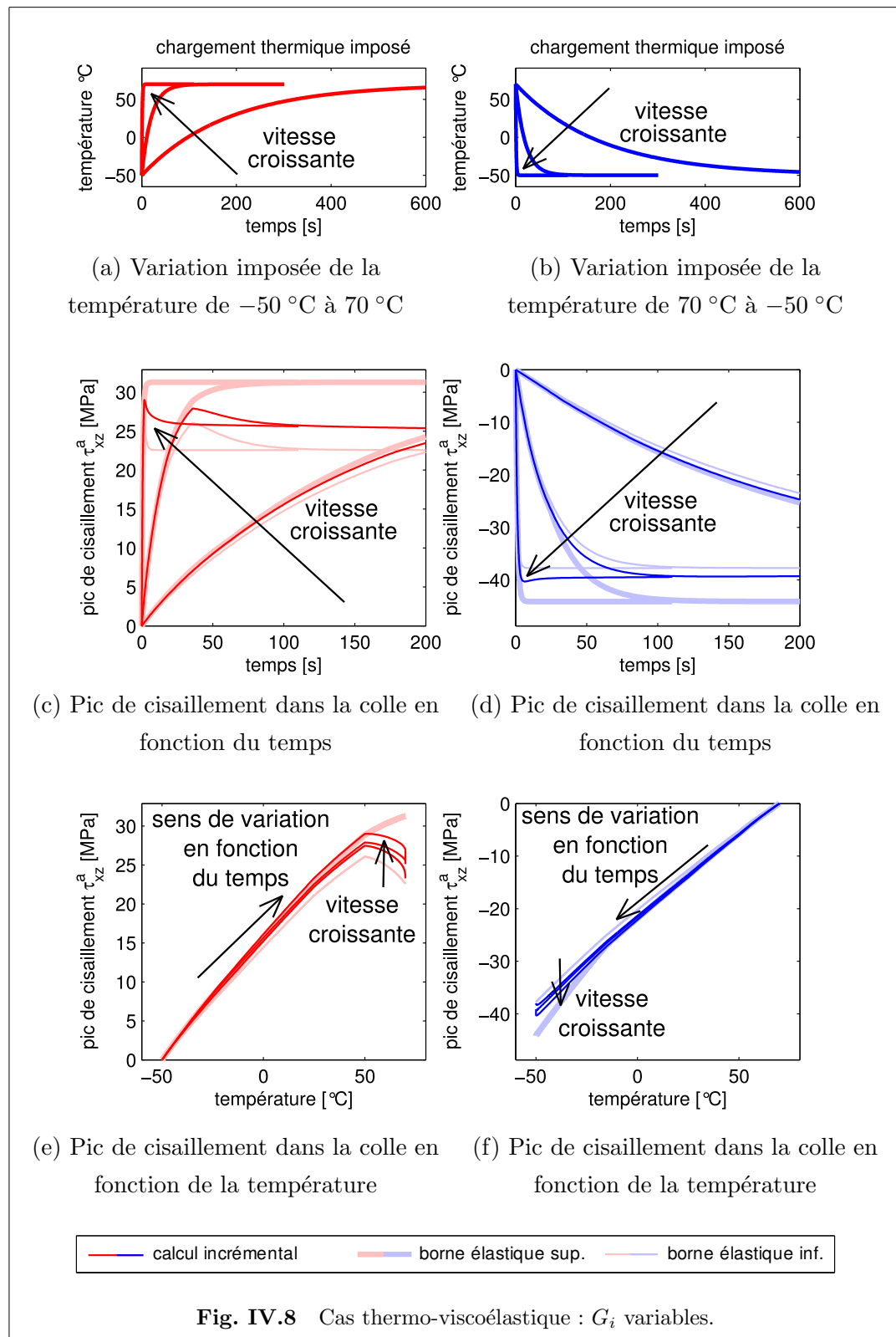
Contrairement aux deux cas précédents, le pic de contrainte ne dépend plus uniquement de la température à un instant donné, mais de tout l'historique de chargement depuis l'instant initial. Par conséquent, les résultats obtenus pour différentes vitesses de chargement, représentés en fonction de la température, forment un ensemble de courbes situées entre les bornes supérieures et inférieures, se rapprochant de la borne supérieure aux temps courts et pour des vitesses élevées, et convergeant vers la borne inférieure aux temps longs. De la même manière, les courbes tracées en fonction du temps tendent toutes à se rejoindre. Il est à noter qu'à tout instant, les chargements rapides donnent une contrainte plus élevée que les chargements lents.

IV.4.5 Cas thermo-viscoélastique : G_i variables

Le cas, plus réaliste, d'un comportement thermo-viscoélastique de la colle est maintenant étudié. Toutes les branches du modèle de Maxwell sont prises en compte dans le calcul, ainsi que la variation des modules $G_i(T)$. Les résultats sont présentés sur la figure IV.8. Comme pour le cas viscoélastique, seuls les résultats obtenus pour $\beta = 1$ s, 20 s et 180 s sont représentés.

Tous les phénomènes déjà décrits précédemment apparaissent dans ce cas :

- le pic de cisaillement du calcul thermo-viscoélastique est borné par les deux calculs thermoélastiques. La borne inférieure correspond aux résultats obtenus pour un modèle thermoélastique, avec uniquement la branche $G_0(T)$ du modèle de Maxwell, dont les résultats sont identiques à ceux présentés sur la figure IV.6. La borne supérieure est obtenue en cumulant les modules de cisaillement $G_i(T)$ des branches du modèle de Maxwell ;
- comme pour le cas thermoélastique, comme les $G_i(T)$ sont variables, les résultats obtenus pour une baisse ou une augmentation de température ne sont pas symétriques. Ils sont globalement plus élevés lorsque la température diminue en raison du raidissement de la colle ;
- lorsque la vitesse de chargement augmente, le pic de cisaillement se rapproche de la borne supérieure du calcul. Au contraire, pour des vitesses lentes et lorsque le temps augmente, la solution thermo-viscoélastique tend vers la borne inférieure ;
- la différence entre les bornes supérieures et inférieures du calcul est plus grande aux hautes températures : entre 23 MPa et 31 MPa pour le passage de -50 °C



à $+70\text{ }^{\circ}\text{C}$ et entre 38 MPa et 44 MPa pour la variation opposée. Ceci est dû au poids plus important des branches viscoélastiques $G_{i>0}$ par rapport à G_0 lorsque la température augmente. La valeur finale du pic de cisaillement est donnée par la borne inférieure, donc 23 MPa pour une augmentation de température ou 38 MPa pour une baisse de température. Pour une vitesse de variation qui serait infinie, le pic de contrainte pourrait atteindre au maximum 31 ou 44 MPa, soit 35% de plus dans le cas de la montée de température et 15% de plus pour la baisse de température ;

- contrairement au cas viscoélastique présenté précédemment, les courbes obtenues pour différentes vitesses de chargement ne conservent pas toujours le même ordre. L'effet de la température, marqué par la chute des modules au-delà de $50\text{ }^{\circ}\text{C}$, provoque un tel décrochage des contraintes que la courbe obtenue pour $\beta = 1\text{ s}$ passe sous la courbe suivante. Cet effet causé par la chute des modules amplifie celui dû à la stabilisation de la température et provoque une chute des contraintes plus rapide que dans le cas viscoélastique ;
- dans le cas d'une variation de $+120\text{ }^{\circ}\text{C}$ en quelques secondes, qui est la vitesse la plus élevée testée dans cette étude, le pic obtenu atteint 93% de la borne élastique supérieure du calcul. La vitesse la plus lente testée, correspondant à la même variation de température mais qui s'établit en une dizaine de minutes, donne un pic de 27.5 MPa contre 26 MPa pour la borne inférieure. La borne élastique inférieure sous-estime donc de 5% le calcul thermo-viscoélastique à vitesse lente et la borne supérieure surestime de 7% le calcul thermo-viscoélastique rapide. Dans le cadre d'une étude simplifiée, pour des chargements très lents ou très rapides, un calcul thermoélastique approprié peut donner une première approximation, mais la différence avec le calcul incrémental, de l'ordre de 5 à 7% dans le cas présent, peut devenir significative dans le cadre d'une étude en fatigue qui nécessite d'être plus précis sur les valeurs calculées, en particulier pour se situer sur une courbe de Wöhler. En dehors de ces deux cas extrêmes, la vitesse de variation de la température présente une forte influence sur la valeur du pic de cisaillement

IV.4.6 Comparaison des différents modèles de calcul

Les méthodes de calcul testées précédemment sont maintenant comparées entre elles pour un cas particulier de chargement thermique. Le cas choisi correspond à l'augmentation de la température de $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ pour les deux vitesses extrêmes

testées, à savoir $\beta = 180$ s pour la plus lente et $\beta = 1$ s pour la plus rapide. Les résultats obtenus pour ces deux vitesses sont présentés sur la figure IV.9. Les valeurs maximales atteintes pour chacune des méthodes sont résumées dans le tableau IV.1. Les écarts relatifs sont calculés en utilisant le résultat thermo-viscoélastique comme référence.

Les courbes 1 et 2 correspondent aux résultats fournis par un calcul élastique classique (cf. équation (IV.31)) en se basant respectivement sur les propriétés thermiques de la colle à 70°C ou à -50°C . Le calcul thermoélastique, situé entre ces deux bornes, correspond à la courbe 3. Le calcul viscoélastique, présenté sur la courbe 4, est basé sur les propriétés thermiques de la colle à 70°C . Le calcul complet, intégrant à la fois les variations des paramètres en fonction du temps et de la température, est présenté sur la courbe 5.

Il est évident, au vu de ces résultats, que les hypothèses de calcul qui sont émises influencent grandement le résultat obtenu. Pour le cas présenté, l'erreur commise par un calcul élastique ne tenant pas compte des variations des propriétés thermiques diffère de 20 à 30 % du résultat de référence. Cette erreur est maximale lors du passage à 50°C , où le calcul 1 donne 18.8 MPa au lieu de 27.5 MPa à vitesse lente ou 29 MPa à vitesse rapide, soit une sous-estimation de 32 à 35 %, respectivement, selon la vitesse de variation de la température.

Le calcul viscoélastique présenté sur la courbe 4 est basé sur les propriétés à -50°C , donc sur les modules les plus élevés. Le résultat obtenu surestime donc encore plus la valeur de référence puisque les branches viscoélastiques s'ajoutent à la branche élastique. Le pic de cisaillement est surestimé de 40 à 45 % dans les cas présentés. De plus, la valeur finale donnée par ce calcul converge vers le résultat élastique à -50°C , donc vers 37.7 MPa, alors que la courbe de référence converge vers le résultat élastique à 70°C , donc vers 22.6 MPa. Ce calcul viscoélastique aboutit donc finalement à un écart de 67% par rapport à un calcul thermoélastique et ne converge pas vers la bonne solution.

En conclusion de ces quelques remarques, la variation des propriétés thermiques de la colle ne peut pas être négligée lorsque l'assemblage collé subit de grandes variations de température.

La comparaison des courbes 3 et 5, correspondant respectivement aux calculs thermoélastique et thermo-viscoélastique, pour les deux vitesses présentées permet de mesurer l'apport de la viscoélasticité en fonction de la vitesse de variation de la température. Dans les cas présentés, la température varie de $+120^\circ\text{C}$ en environ 3β ,

Courbe	Vitesse lente ($\beta = 180$ s)		Vitesse rapide ($\beta = 1$ s)	
	Cisaillement [MPa]	Ecart [%]	Cisaillement [MPa]	Ecart [%]
1	22.6	-18 %	22.6	-22 %
2	37.7	+37 %	37.7	+30 %
3	26	-5 %	26	-10 %
4	38.8	+41 %	42.3	+45 %
5	27.5	référence	29	référence

Tab. IV.1 Valeur maximale du pic de cisaillement obtenu dans la colle en fonction du modèle choisi pour deux vitesses de variation de la température.

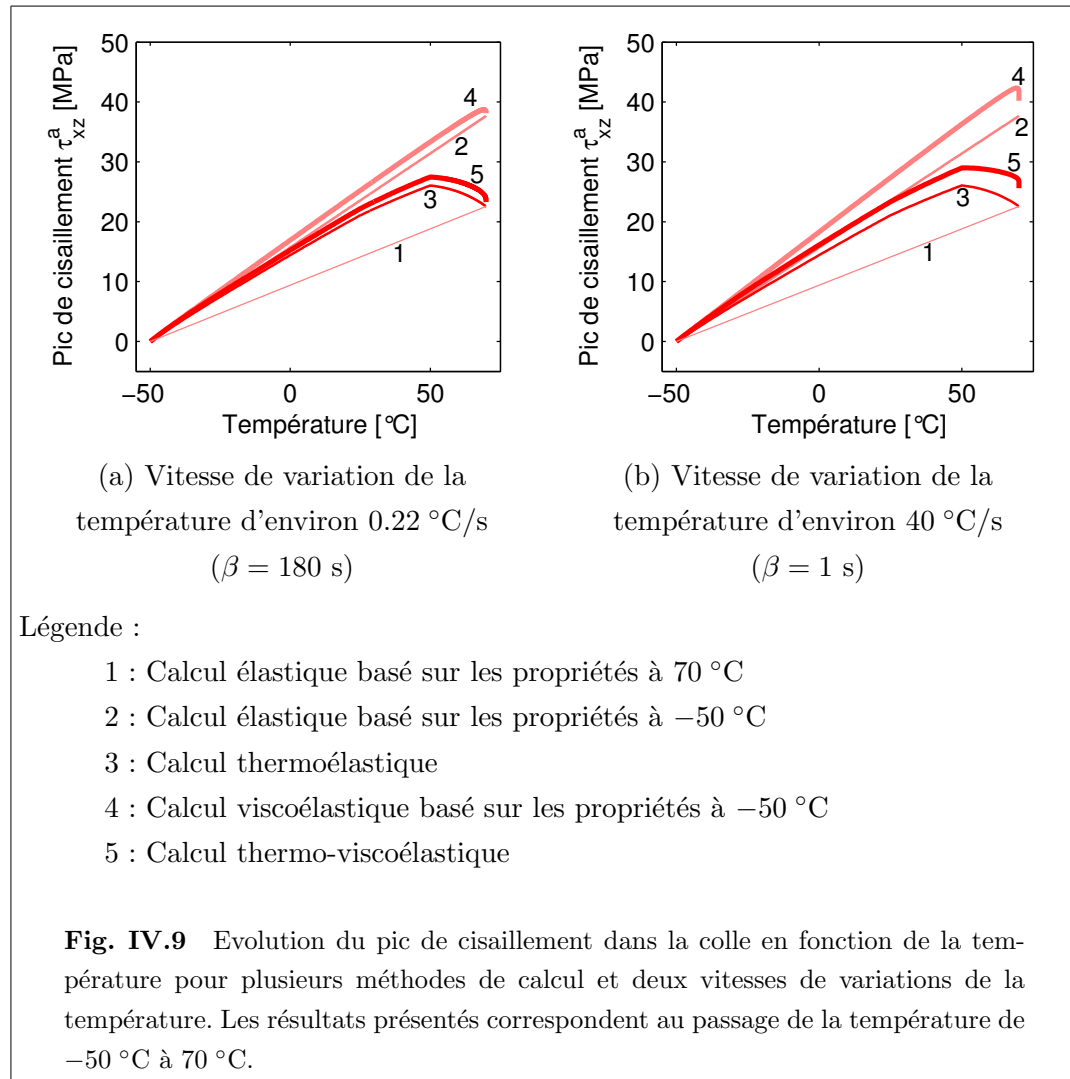
soit 3 s pour le plus rapide et 9 min pour le plus lent. Ceci correspond respectivement à des vitesses de 40 °C/s et de 0.22 °C/s (ou 13.3 °C/min). Négliger l'apport des branches viscoélastiques pour une vitesse de 40 °C/s aboutit à une sous-estimation de 10 % du pic de cisaillement. Pour la vitesse la plus lente testée, le calcul thermoélastique sous-estime le pic de cisaillement de 5 % seulement. Cette erreur, qui reste modeste, devient cependant non-négligeable dans le cadre d'une sollicitation en fatigue de l'assemblage collé.

Un modèle thermoélastique peut donc suffire dans certaines conditions d'utilisation. Il faut noter toutefois que même à vitesse très lente l'erreur commise en négligeant les phénomènes viscoélastiques peut devenir significative pour une étude de résistance en fatigue.

IV.5 Conclusion

Un modèle de calcul des contraintes dans un assemblage collé est proposé dans ce chapitre. Le comportement non-linéaire de la colle est pris en compte en utilisant une loi de comportement du type Maxwell généralisée. Plusieurs effets liés à l'influence de la température ou du temps sur le comportement de la colle sont analysés séparément. Il apparaît, au vu des simulations, que le comportement thermoélastique présente un impact très fort sur la valeur du pic de cisaillement obtenu dans la colle. Celui-ci ne peut donc pas être négligé lors du calcul de dimensionnement d'assemblages collés soumis à des chargements thermiques.

Le comportement viscoélastique est lui surtout prononcé lorsque la température s'approche de la transition vitreuse, au delà de 50 °C, ou de la transition secondaire



de la colle, en dessous de $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ceci est dû au poids plus important des branches viscoélastiques par rapport à la branche élastique du modèle de Maxwell à ces températures. En théorie, l'apport des branches viscoélastiques pourrait représenter 15% du résultat élastique à $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$ et jusqu'à 35% du résultat élastique à $70\text{ }^{\circ}\text{C}$. Mais en pratique, il faudrait appliquer des vitesses de variation de la température très élevées pour aboutir à ces résultats. Pour les vitesses testées ici, de $13.3\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{min}$ à $40\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{s}$, et à $70\text{ }^{\circ}\text{C}$, la contrainte viscoélastique représente entre 5% et 10% de la contrainte élastique. L'erreur commise par un calcul thermoélastique au lieu d'un calcul thermo-viscoélastique est donc relativement faible dans les cas présentés, mais peut devenir non-négligeable dans le cadre d'un chargement cyclique pour une étude de résistance en fatigue.

Chapitre V

Étude expérimentale

Dans ce chapitre sont présentés différents essais réalisés sur une éprouvette d'aluminium renforcée par deux patchs composites collés. Des chargements thermiques et mécaniques sont appliqués, puis les résultats expérimentaux sont comparés aux résultats des différents modèles de calcul développés dans les chapitres précédents à des fins de validation.

Sommaire

V.1	Introduction	131
V.2	Présentation de la méthode de la grille	132
V.2.1	Introduction	132
V.2.2	Principe	134
V.2.3	Traitement des résultats	135
V.3	Dispositif expérimental	136
V.3.1	Éprouvettes utilisées	136
V.3.2	Application des chargements thermiques et mécaniques . .	139
V.3.3	Mesures effectuées	139
V.4	Essais thermiques	140
V.4.1	Présentation de l'essai	140
V.4.2	Résultats obtenus pour le patch unidirectionnel	141
V.4.3	Résultats obtenus pour le patch croisé $[0/90]_s$	149
V.5	Essais thermo-mécaniques	154
V.5.1	Présentation de l'essai	154
V.5.2	Evolution du pic de cisaillement dans la colle	155
V.6	Conclusion	158

V.1 Introduction

L'OBJECTIF de ce chapitre est d'étudier expérimentalement le champ de déformations qui apparaît au sein d'une éprouvette renforcée par un patch composite collé lorsque la température varie. La méthode choisie pour la mesure des champs cinématiques est une méthode sans contact. Il s'agit de la méthode de la grille, développée par Surrel [Sur94], qui consiste à enregistrer les images successives d'une grille solidaire de la surface étudiée. Un traitement approprié permet alors d'obtenir les champs cinématiques sur toute la surface à partir de ces images. Cette mesure est effectuée sur l'une des faces de l'éprouvette. Une grille est transférée sur cette face. La mesure du champ de température est effectuée sur la deuxième face de l'éprouvette. Les comportements, thermique et cinématique, des deux faces de l'éprouvette sont supposés être identiques puisque celle-ci est symétrique. Plusieurs types d'essais sont réalisés dans le but de valider les différents modèles de calculs développés aux chapitres précédents.

Des essais thermiques qui consistent à appliquer une variation de température homogène à la structure collée sont d'abord conduits sur des éprouvettes renforcées par patches unidirectionnels, puis sur des éprouvettes renforcées par patches croisés. Les champs de déformations obtenus dans chacun des cas et suivant chaque direction sont alors comparés à ceux prédits par le calcul bidimensionnel présenté au chapitre II.

Des essais couplant à la fois une variation de température et un chargement mécanique sont ensuite mis en oeuvre afin de faire apparaître un comportement visco-élastique de la structure. Les résultats mesurés expérimentalement sont comparés au modèle de calcul thermo-viscoélastique unidimensionnel présenté au chapitre IV. L'éprouvette utilisée dans ce cas est renforcée par un patch unidirectionnel uniquement afin de s'approcher du mieux possible d'un comportement unidirectionnel.

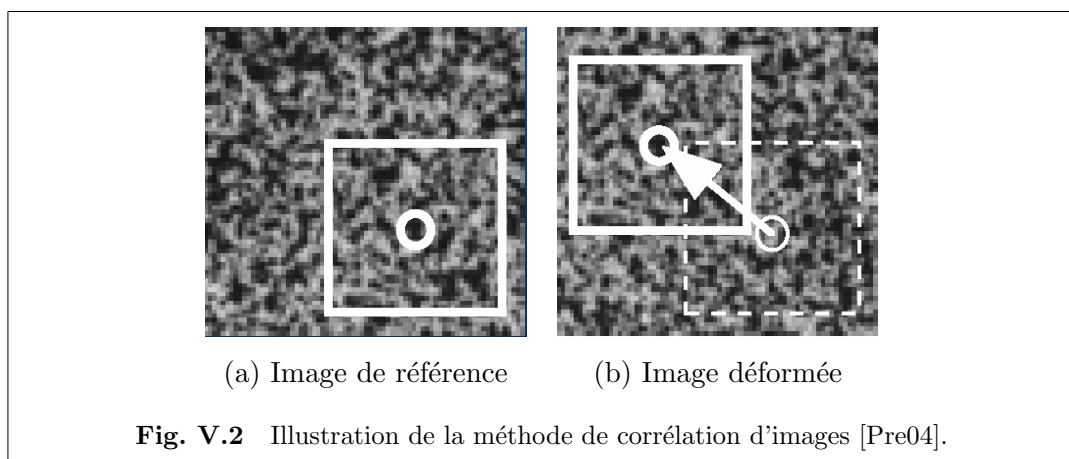
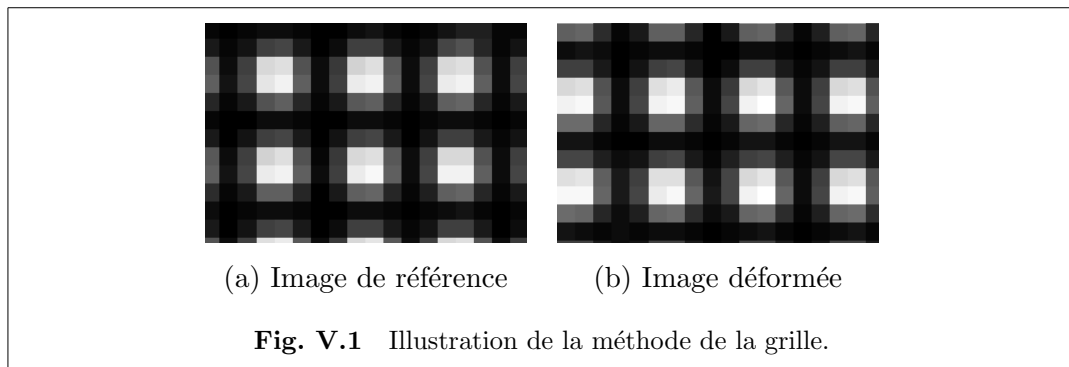
Les variations de température ne seront que positives par rapport à la température ambiante, ceci pour des raisons techniques. Une variation négative nécessiterait l'utilisation d'une enceinte incompatible avec les mesures de champs qui sont réalisées.

V.2 Présentation de la méthode de la grille

V.2.1 Introduction

Contrairement aux jauges de déformation qui permettent d'obtenir une information localisée sur l'état mécanique d'une structure, certaines méthodes de mesure sans contact permettent d'accéder à des champs de déplacements en surface d'un échantillon. Parmi ces méthodes, la méthode de la grille [Sur94] permet de mesurer les deux composantes du champ de déplacements d'une surface plane. Il s'agit d'une technique de mesure optique basée sur l'acquisition, au moyen d'une caméra, du champ d'intensité lumineuse diffusée par une grille solidaire de la surface à étudier. La grille est constituée de traits d'égales largeurs et équidistants formant un réseau périodique. Elle peut être unidirectionnelle ou croisée, selon la direction qui est étudiée. Cette grille est déposée sur la zone à étudier par collage, transfert ou autre. Deux images sont alors comparées, avant et après déformation, comme illustré sur la figure V.1. Il est à noter que cette méthode a déjà été utilisée avec succès pour diverses applications en mécanique des matériaux et des structures [DGS01, PASV98, AEV⁺04, GPS99, TDG05].

Il existe également d'autres techniques de mesures de champs basées, par exemple, sur la corrélation d'images. Dans ce cas, la texture de la zone d'intérêt doit être aléatoire. Il faut pour cela parfois pulvériser un mouchetis de peinture sur la surface de l'éprouvette, mais la texture de l'éprouvette peut s'avérer suffisante dans certains cas. La caméra effectue alors deux prises de vue, l'une de référence et l'autre déformée. La zone d'intérêt est ensuite découpée en "imasettes" et la méthode de corrélation consiste à retrouver sur l'image déformée les motifs présents sur l'image de référence (cf. figure V.2). Ces deux méthodes de mesure sont limitées à des cas où il n'y a pas de mouvement hors-plan de la structure étudiée. Pour mesurer ces mouvements s'ils ne sont pas négligeables, il existe aussi des méthodes dites de stéréo-corrélation, où une deuxième caméra est utilisée afin de reconstruire une image 3D de la zone observée. Dans le cas présent, la symétrie des éprouvettes permet de négliger les mouvements hors-plan. Les mors de la machine sont également supposés parfaitement alignés en cas de sollicitation mécanique. Le principe de base de la méthode de la grille, utilisée dans cette étude, est présenté dans le paragraphe suivant.



V.2.2 Principe

La grille utilisée étant supposée parfaitement solidaire de la surface, l'intensité $I(M)$ au point M de coordonnées (x, y) s'écrit à l'état initial :

$$I(M) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \gamma \text{frgn} \left(2\pi \vec{F} \cdot \vec{OM} \right) \right] \quad (\text{V.1})$$

γ représente le contraste de l'intensité $I(M)$, I_0 représente l'intensité moyenne et \vec{F} représente le vecteur fréquence spatiale de la grille. frgn représente une fonction périodique de période 2π . Soit $\vec{u}(M)$ le déplacement d'un point de la grille entre l'état initial et l'état déformé.

A l'état final, $I(M')$ s'écrit dans le cas unidirectionnel :

$$I(M') = \frac{I_0}{2} \left[1 + \gamma \text{frgn} \left(2\pi \vec{F} \cdot \vec{OM} + 2\pi \vec{F} \cdot \vec{u}(M) \right) \right] \quad (\text{V.2})$$

De cette expression apparaît une phase $\Phi(M)$ telle que :

$$I(M') = \frac{I_0}{2} \left[1 + \gamma \text{frgn} \left(2\pi \vec{F} \cdot \vec{OM} + \phi(M) \right) \right] \quad (\text{V.3})$$

La modulation de cette phase s'écrit :

$$\phi(M) = 2\pi \vec{F} \cdot \vec{u}(M) \quad (\text{V.4})$$

Dans le cas d'une grille croisée, les modulations de phase suivant les directions x et y s'écrivent de manière analogue. Les composantes suivant les directions x et y s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} \phi_x(M) = \frac{2\pi}{p_x} u_x(M) \\ \phi_y(M) = \frac{2\pi}{p_y} u_y(M) \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

p_x et p_y représentent les pas de la grille suivant les directions x et y respectivement. $u_x(M)$ et $u_y(M)$ sont les composantes du champ de déplacements suivant les directions x et y . Le principe de la méthode de la grille est donc d'extraire la modulation de phase et de la transformer en champ de déplacements. Cette modulation de phase est déterminée par transformée de Fourier fenêtrée. Les détails de ce calcul sont disponibles dans [Sur94]. Les champs de déplacements suivant les directions x et y sont alors obtenus en utilisant l'équation (V.5). Les champs de déformations ε_{xx} et ε_{yy} sont finalement accessibles par dérivation des champs de déplacements, car par définition :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad (\text{V.6})$$

V.2.3 Traitement des résultats

En pratique, la méthode de la grille ne permet que de mesurer des déplacements *modulo* le pas de la grille. Des sauts de phase peuvent dès lors apparaître sur les résultats obtenus lorsque le déplacement en un point est supérieur à une période de la grille. Les champs de déplacements obtenus sont alors corrigés en ajoutant ou en retranchant le nombre nécessaire de périodes pour supprimer ces sauts de phase. Ces déplacements obtenus sont également perturbés par du bruit ou des valeurs aberrantes dues par exemple à des défauts de la grille ou de l'éclairage : poussières, grille localement mal transférée, variation légère du pas de la grille, rayon lumineux, etc. Pour pallier ce problème, les champs de déplacements sont d'abord lissés avant d'être dérivés afin de diminuer le bruit sur les champs de déformations.

De nombreuses méthodes pour lisser et dériver les champs de déplacements sont disponibles dans la littérature [Sur01]. Ces méthodes sont cependant basées sur une approche locale afin d'obtenir les champs de déformations. Dans le cas présent, la forme globale du champ de déplacements est supposée être connue. Elle est en effet supposée être très proche de la solution analytique unidimensionnelle d'un joint collé soumis à une variation de température [HS73b, HS73a], colonne par colonne ou ligne par ligne. La procédure développée consiste donc ici à caler une courbe paramétrée sur les résultats expérimentaux, colonne par colonne pour les déplacements u_{xx}^c suivant la direction x puis ligne par ligne pour les déplacements u_{yy}^c suivant la direction y .

Colonne par colonne, les déplacements sont alors lissés en cherchant à minimiser l'écart entre les mesures expérimentales et une fonction similaire à la solution théorique unidimensionnelle donnée par l'équation (I.9), paramétrée par cinq variables indépendantes $\{A, B, C, D, E\}$ [MBG06], ce qui donne par exemple pour le déplacement suivant x :

$$u_{xx}^c(x) = Ae^{Cx} + Be^{-Cx} + Dx + E \quad (\text{V.7})$$

La déformation ε_{xx}^c suivant la direction x est donc donnée par :

$$\varepsilon_{xx}^c(x) = \frac{du_{xx}^c(x)}{dx} = ACe^{Cx} - BCe^{-Cx} + D \quad (\text{V.8})$$

Au niveau du bord libre ($x = 0$), la déformation du patch $\varepsilon_{xx}^c(x)$ est donnée par $AC - BC + D$. Par analogie avec l'équation du modèle unidirectionnel thermo-mécanique présenté au paragraphe I.4.2, cette déformation au bord libre correspond au terme " $\alpha_x \Delta T$ ". Elle est donc non nulle dans le cas d'un chargement thermique contrairement au cas d'un chargement mécanique seul. Il est cependant possible de la négliger dans

certains cas, notamment lorsque cette déformation est très inférieure à celle mesurée dans la zone courante du patch, et ainsi de supposer par exemple suivant la direction x que :

$$\varepsilon_{xx}^c(x=0) = AC - BC + D = 0 \quad (\text{V.9})$$

L'équation-type (V.7) peut alors être simplifiée et devenir une équation ne dépendant plus que de quatre paramètres indépendants :

$$u_{xx}^c(x) = Ae^{Cx} + Be^{-Cx} - (A - B)Cx + E \quad (\text{V.10})$$

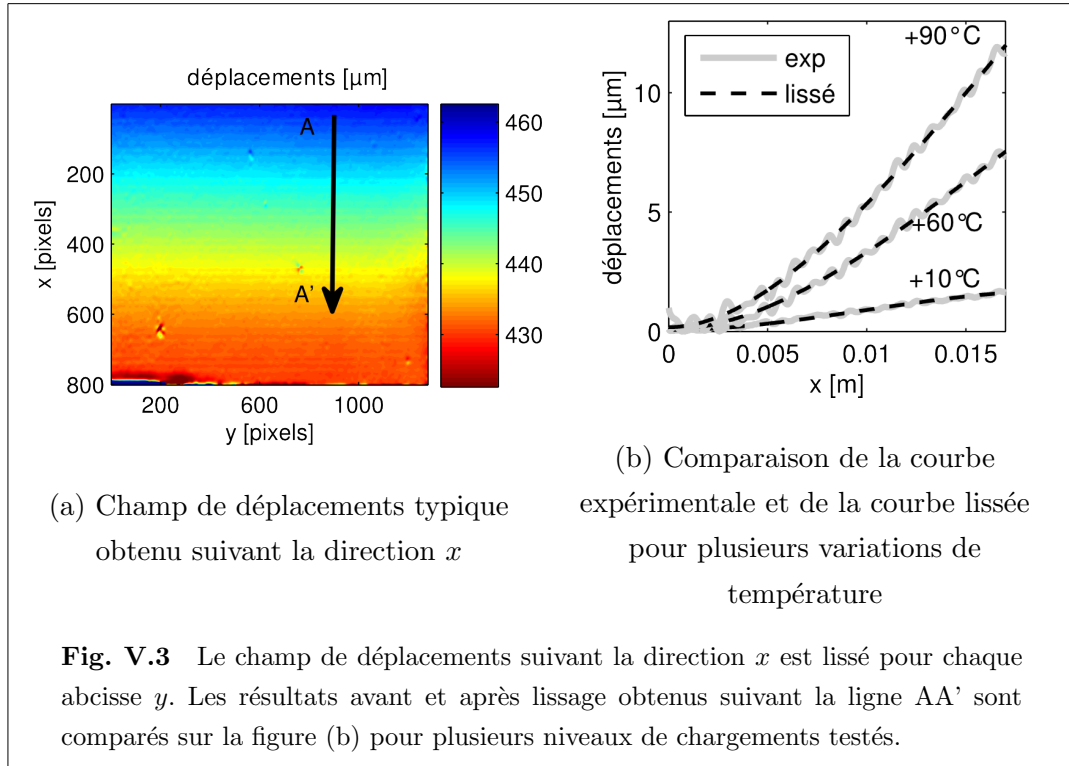
Les coefficients A , B , C et E sont alors optimisés pour chaque colonne afin de minimiser l'écart quadratique entre cette fonction modèle et les déplacements expérimentaux. Les fonctions de Matlab adaptées à ce type de problème (*lsqcurvefit* est utilisée ici) et basées sur la méthode des moindres carrés sont donc utilisées. Ces méthodes sont basées sur une variante de la méthode de Newton [CL94]. Les déformations sont ensuite obtenues par dérivation du champ de déplacements lissé.

La figure V.3(a) présente un champ de déplacements typique obtenu par la méthode de la grille. Les déplacements suivant la direction x , bruts et lissés, obtenus pour trois variations de température sont présentés sur la figure V.3(b).

V.3 Dispositif expérimental

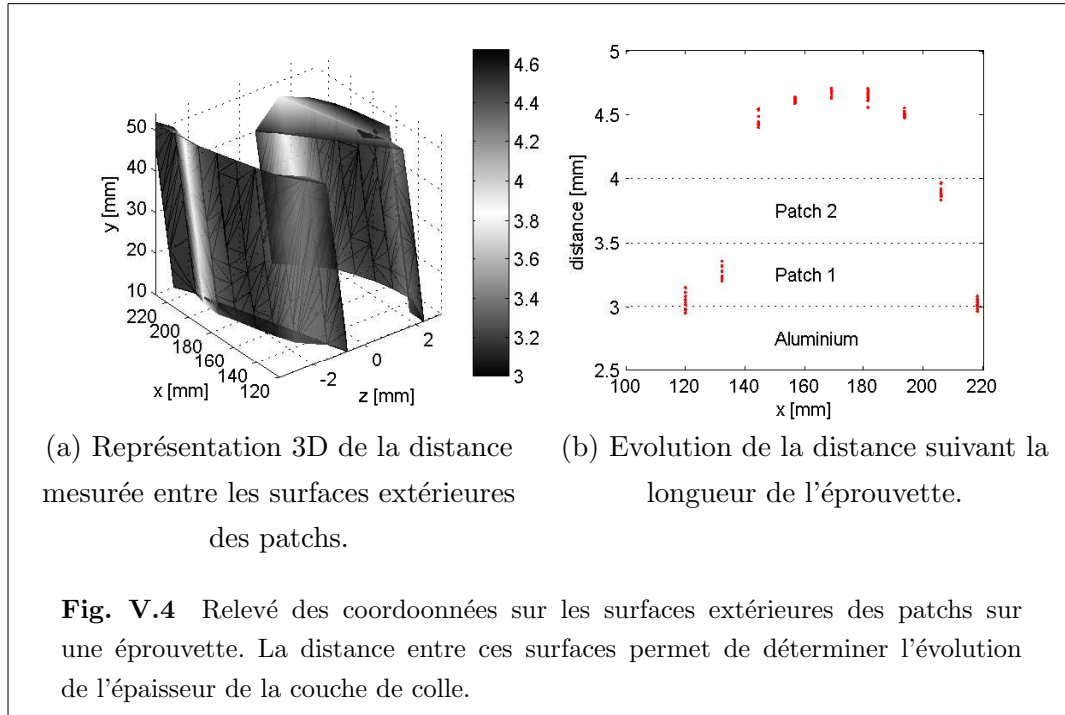
V.3.1 Éprouvettes utilisées

Les éprouvettes testées ont été fournies et patchées par l'Atelier Industriel de l'Aéronautique (AIA) de Clermont-Ferrand. Le substrat est une pièce d'aluminium 2024 T3, de 340 mm de longueur, 70 mm de largeur et 3 mm d'épaisseur. L'aluminium est supposé suivre une loi de comportement linéaire élastique isotrope et a un module d'Young $E_s = 73.8$ GPa, un coefficient de Poisson $\nu_s = 0.33$ et un coefficient de dilatation thermique $\alpha_s = 23.6 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Chaque éprouvette est renforcée symétriquement par deux patchs carrés de 70 mm de côté. Le patch utilisé est constitué de quatre plis unidirectionnels en carbone/époxyde T300/914. Chaque pli est supposé suivre un comportement linéaire élastique orthotrope dont les propriétés thermo-mécaniques sont rappelées dans le tableau II.1. L'épaisseur totale d'un patch est de 0.5 mm. Cette épaisseur est constante sur toute la surface et n'est pas diminuée progressivement sur les bords, contrairement à ce qui est souvent fait en pratique, ceci afin de permettre une comparaison des résultats obtenus avec le modèle analytique présenté au chapitre II et surtout afin de bien mettre en évidence



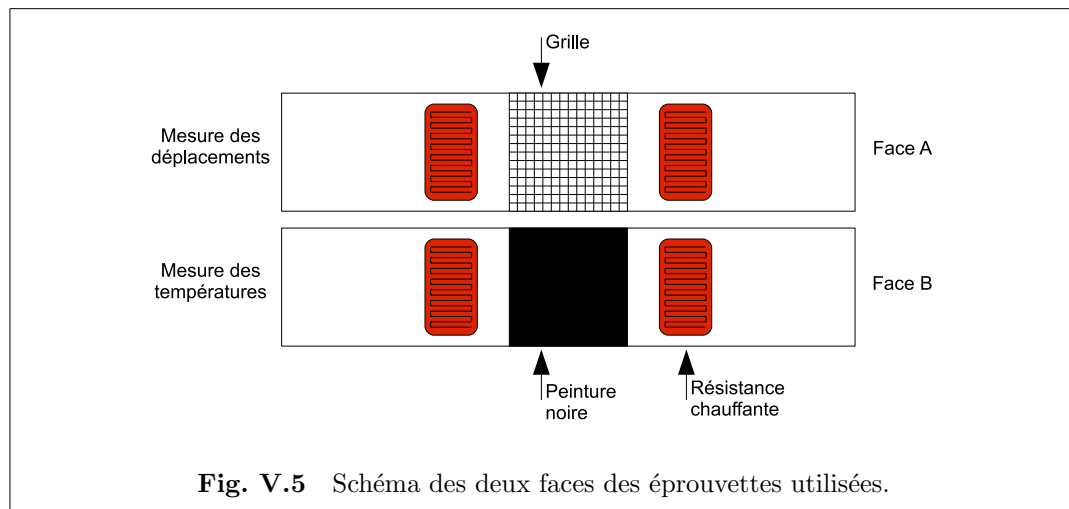
le cisaillement dans la colle. Pour les besoins de l'étude, deux types de patchs sont utilisés : des patchs unidirectionnels et des patchs croisés $[0,90]_s$. L'assemblage des patchs sur l'éprouvette se fait à 120 °C. La colle utilisée est de la Redux 312 fournie par Hexcel. L'épaisseur nominale du film de colle est de 0.15 mm mais des mesures expérimentales ont été effectuées pour déterminer plus précisément l'évolution de cette épaisseur. Les relevés effectués sont présentés sur la figure V.4. Les coordonnées des points ont été obtenues en effectuant une mesure de la hauteur de manière régulière de chaque côté de l'éprouvette. Les surfaces sont donc reconstruites et la distance de chaque point à la nappe opposée est calculée. La distance maximale entre les deux surfaces extérieures des patchs est de 4.7 mm, alors que la distance minimale relevée est de 4.4 mm. Les épaisseurs de l'aluminium et des deux patchs sont supposées constantes et respectivement égales à 3 mm et 0.5 mm, ce qui permet d'établir que pour les points relevés, l'épaisseur d'une couche de colle varie entre 0.2 mm sur les bords et 0.35 mm au maximum dans la partie centrale du patch. Il faut toutefois préciser que la densité utilisée pour le relevé ne permet pas de conclure sur l'épaisseur précise de la couche de colle au niveau du bord libre.

Les éprouvettes fournies sont ensuite préparées avant d'être testées. L'objectif



de ces essais est de suivre en parallèle un champ de déformations et un champ de températures. Ces mesures sont effectuées de part et d'autre de l'éprouvette. Chaque côté subit donc un traitement spécifique :

- le côté de l'éprouvette servant à la mesure des champs de déplacements par la méthode de la grille est équipé d'une grille croisée présentant une période de 5 traits par mm. Cette grille permet de mesurer les déplacements dans les directions longitudinale et transversale de l'éprouvette. La méthode utilisée pour transférer la grille sur le patch est présentée en détails dans [PG04]. Une colle blanche, la E504 fournie par Epotecny, est d'abord déposée uniformément sur toute la surface du patch. Une grille de couleur noire imprimée sur un support en plastique est ensuite déposée côté encre sur la colle, de manière à s'aligner parfaitement avec l'éprouvette et les fibres du patch. La colle polymérise ensuite pendant 40 heures à 37 °C. Le film plastique est finalement retiré, laissant alors apparaître la grille noire transférée sur le fond blanc de la colle ;
- la deuxième face de l'éprouvette est utilisée pour la mesure de température à l'aide d'une caméra infrarouge. Dans ce but, et afin d'obtenir une émissivité maximale de la surface étudiée, ce côté de l'éprouvette est peint en noir.



V.3.2 Application des chargements thermiques et mécaniques

Le chargement thermique est imposé à l'éprouvette à l'aide de résistances chauffantes fournies par Minco. Chaque éprouvette est équipée de quatre résistances chauffantes disposées sur les deux faces et à chaque extrémité des patches, comme présenté sur la figure V.5. Chaque résistance, de 9.8Ω , mesure $57 \times 31 \text{ mm}^2$ et peut fournir une densité de puissance de 4.7 W/cm^2 , soit potentiellement plus de 330 W . L'alimentation utilisée fournit 90 W répartis de manière égale pour chaque résistance afin d'avoir un champ de températures symétrique et le plus uniforme possible.

L'éprouvette est installée dans une machine de traction hydraulique Schenck pouvant fournir une force de 250 kN . Elle est positionnée dans le mors inférieur lors des essais de dilatation libre. Le deuxième mors est serré uniquement pour les essais cumulant un chargement thermique à un chargement mécanique.

V.3.3 Mesures effectuées

La caméra utilisée pour prendre les images successives de la grille est une caméra cinématique présentant une résolution de $1376 \times 1040 \text{ pixels}^2$. La caméra est placée rigoureusement en face de l'éprouvette, à une distance pour laquelle chaque période est discrétisée sur cinq pixels de l'image obtenue, comme présenté sur la figure V.6. La taille maximale de la zone observée est donc de $55 \times 42 \text{ mm}^2$. En pratique, seule une partie du patch peut donc être suivie lors de l'essai. Neuf pixels sont utilisés en chaque point de l'image pour calculer son déplacement. Comme un pixel correspond à $40 \mu\text{m}$, la résolution spatiale de ce dispositif est de $360 \mu\text{m}$. Les images sont encodées sur 12

bits, ce qui permet d'obtenir 4096 niveaux de gris. Un dispositif d'éclairage permet d'assurer une luminosité uniforme sur la surface étudiée et un contraste maximal entre le fond blanc de l'image et la grille noire.

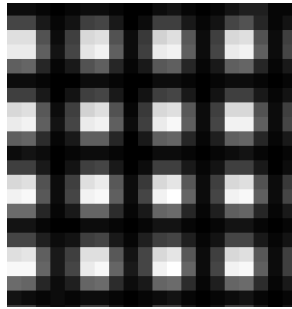


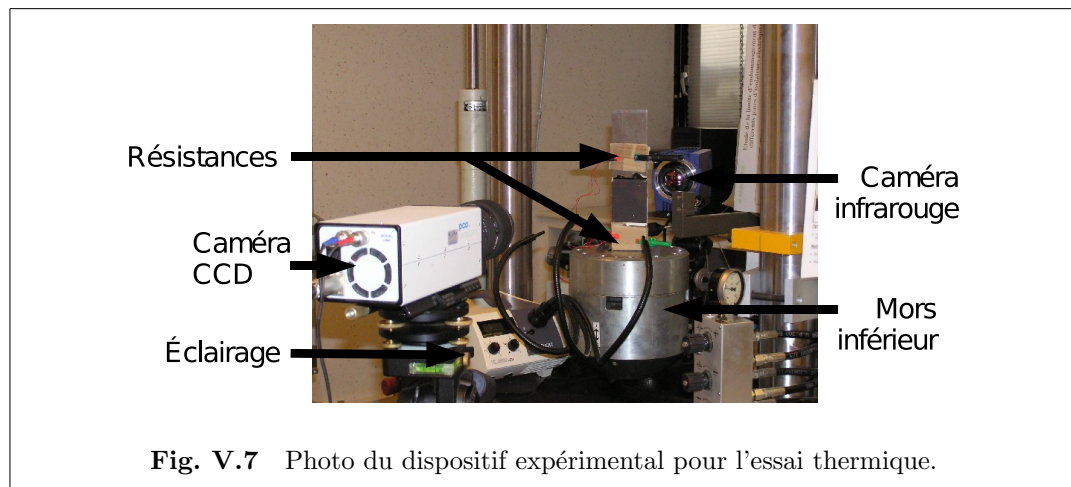
Fig. V.6 Image typique de la grille. Chaque période est discrétisée sur 5 pixels de la caméra.

La température est mesurée quant à elle à l'aide d'une caméra thermique CEDIP Jade, pilotée par le logiciel Altair. Cette caméra est positionnée de manière à avoir un aperçu global du champ de températures au niveau de la surface supérieure du patch. L'image obtenue se caractérise par une résolution de 320×240 pixels². La résolution thermique de la caméra est de 0.02 K. La température est supposée être identique dans toute l'épaisseur de l'éprouvette.

V.4 Essais thermiques

V.4.1 Présentation de l'essai

La première série d'essai est réalisée en imposant une variation de température à l'éprouvette sans imposer de chargement mécanique. L'éprouvette est fixée uniquement sur le mors inférieur de la machine. Il s'agit donc d'une simple dilatation libre de l'éprouvette en cas de changement de température. Ces essais ont pour but de comparer les déformations mesurées à celles obtenues avec le modèle analytique bidimensionnel présenté au chapitre II. Le dispositif expérimental est présenté sur la figure V.7. Deux sortes d'éprouvettes sont utilisées : les unes sont renforcées par des patchs composites en carbone/époxyde unidirectionnels dont les plis sont alignés suivant la longueur de l'éprouvette, les autres sont équipées de patchs croisés $[0/90]_s$ en carbone/époxyde.



V.4.2 Résultats obtenus pour le patch unidirectionnel

Pour ce premier essai, l'éprouvette testée est renforcée symétriquement par deux patches en carbone/époxyde unidirectionnels dont les fibres sont alignées suivant la longueur de l'éprouvette. Le cycle de température appliqué à l'éprouvette est présenté sur la figure V.8. Le champ de température est mesuré régulièrement pendant tout l'essai. Les mesures cinématiques sont en revanche effectuées manuellement au rythme de un à deux enregistrements par minute, en fonction de la rapidité de variation de la température. Pour chaque enregistrement de la grille, 64 images successives sont prises en rafale en quelques secondes puis moyennées afin d'éliminer la plus grande partie du bruit de la caméra CCD. La zone observée par la caméra cinématique est représentée sur la figure V.10(a). L'image choisie pour illustrer les résultats obtenus est représentée sur la figure V.8. Le champ de température obtenu à cet instant est présenté sur la figure V.9(a). La température varie de $\pm 4\text{ }^{\circ}\text{C}$ sur la surface du patch autour de la valeur moyenne qui est de $68\text{ }^{\circ}\text{C}$, ce qui correspond à une variation d'environ $47\text{ }^{\circ}\text{C}$ par rapport à la température ambiante initiale de $21\text{ }^{\circ}\text{C}$. Le module de cisaillement de la colle correspondant aux températures observées à cet instant est présenté sur la figure V.9(b). Ce module correspond aux résultats obtenus lors de l'essai dynamique présenté au chapitre III. Les résultats analytiques calculés dans la suite sont effectués en se basant sur la température maximale relevée à la surface de l'éprouvette.

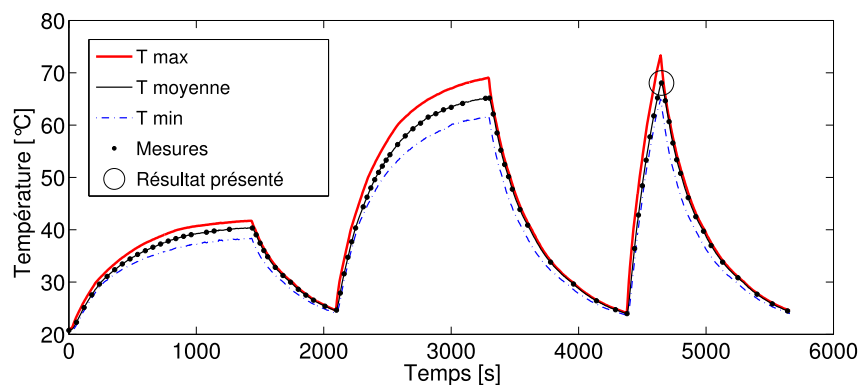


Fig. V.8 Cycle de température imposé à l'éprouvette. Les mesures de champs cinématiques sont prises régulièrement et sont représentées par des points sur le graphique. Le point encadré correspond à l'image présentée dans la suite du paragraphe.

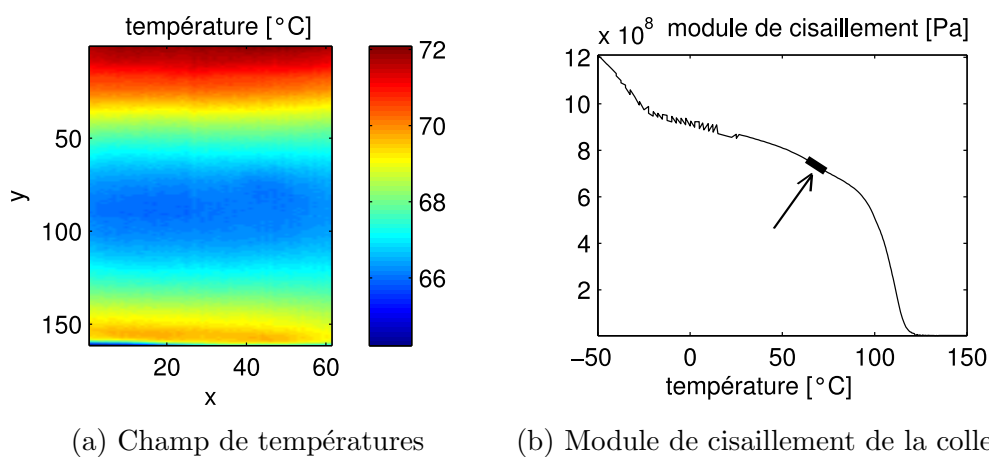
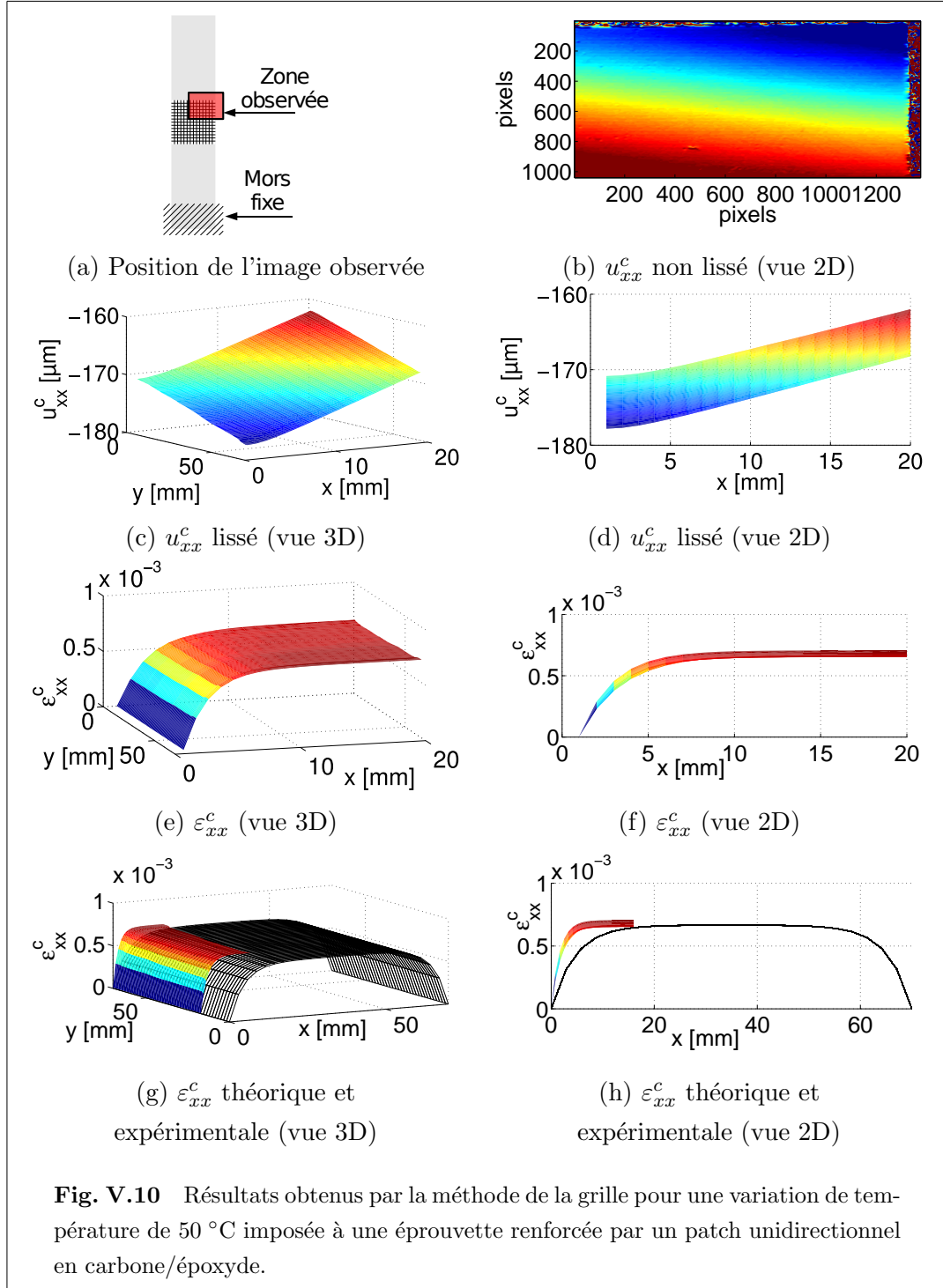


Fig. V.9 (a) Champ de températures du patch composite lors de la mesure cinématique. (b) Evolution du module de cisaillement de la colle en fonction de la température et repérage de la zone utile pour l'essai sur éprouvette unidirectionnelle.



V.4.2.1 Champ de déplacements u_{xx}^c

Le champ de déplacements obtenu avant lissage est présenté sur la figure V.10(b). Le lissage des déplacements suivant la direction x est effectué colonne par colonne en utilisant la fonction modèle simplifiée donnée par l'équation (V.10). En effet, un calcul analytique bidimensionnel donne une déformation maximale de la zone courante d'environ $6.7 \cdot 10^{-4}$ suivant la direction x contre une déformation maximale au niveau du bord libre de $1.02 \cdot 10^{-6}$. Il est donc légitime dans ce cas de négliger la déformation du patch au niveau du bord libre.

Les résultats obtenus après lissage sont présentés sur les figures V.10(c-d). Deux zones sont visibles sur le champ de déplacements obtenu suivant la direction x . Loin du bord libre, les déplacements sont quasi-linéaires et égaux sur toute la largeur de l'éprouvette. Un décalage entre le bord et le milieu de l'éprouvette est visible. Il est probablement dû à un glissement de l'éprouvette dans le mors. Près du bord libre, le déplacement converge vers un "plateau" à pente nulle, correspondant à la zone de transfert des efforts.

V.4.2.2 Champ de déformations ε_{xx}^c

Le champ de déplacements obtenu précédemment est dérivé pour obtenir les déformations suivant la direction x . Les résultats expérimentaux sont présentés sur les figures V.10(e-f) et comparés aux résultats théoriques obtenus à l'aide du modèle analytique bidimensionnel sur les figures V.10(g-h). Pour le calcul présenté, l'épaisseur de la couche de colle correspond à la valeur moyenne relevée expérimentalement, soit 0.3 mm.

La déformation expérimentale moyenne observée dans la zone courante du patch est de $6.8 \cdot 10^{-4}$. Ce résultat est donc très proche de celui fourni par le calcul analytique bidimensionnel, qui est de $6.6 \cdot 10^{-4}$. Cependant, la longueur de la zone de transfert est nettement plus courte expérimentalement que théoriquement. Or cette longueur de transfert est particulièrement sensible à la valeur donnée au module de cisaillement de la colle ou à l'épaisseur du joint de colle. Le module choisi ici pour le calcul analytique est donc trop souple ou l'épaisseur du joint de colle trop grande. En effet un module plus rigide de la colle favoriserait un transfert plus rapide des déformations du substrat vers le patch. De même, une épaisseur plus faible du joint collé conduirait à un transfert plus rapide des déformations.

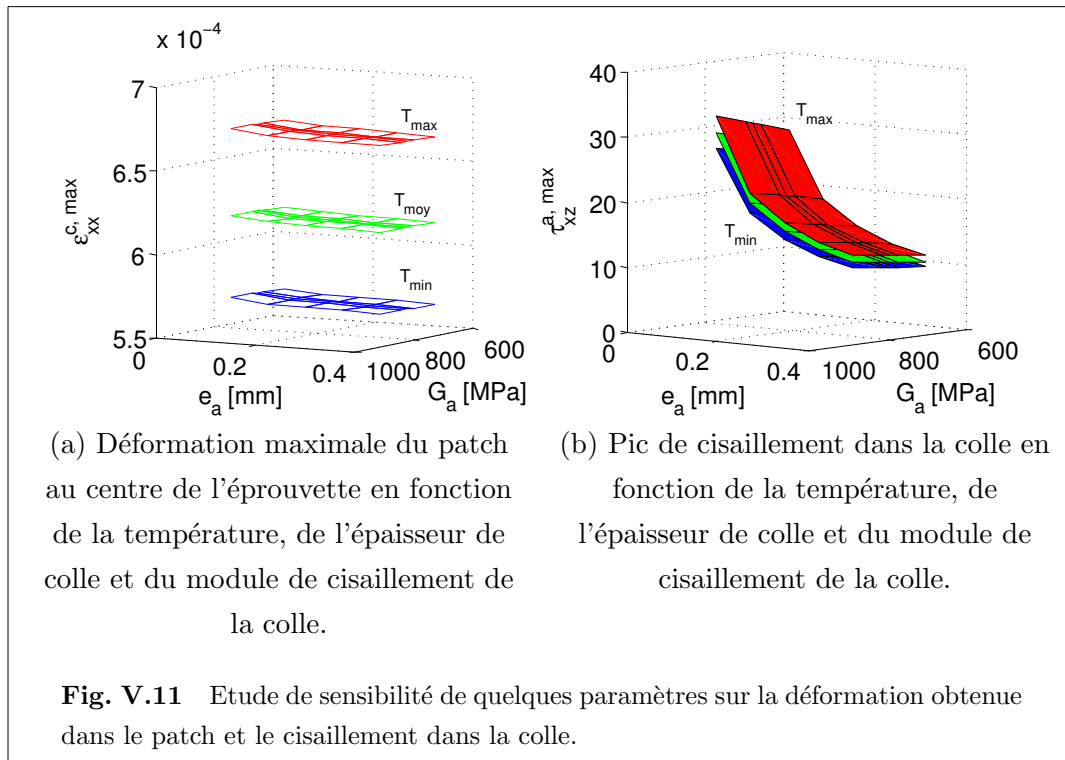
L'épaisseur de la couche de colle est supposée être ici égale à 0.3 mm. Cependant,

cette valeur représente l'épaisseur moyenne mesurée et la colle peut déborder lors de la mise en place du patch et provoquer un amincissement du film de colle près des bords. Ceci a été vérifié expérimentalement lors de mesures tridimensionnelles présentées sur la figure V.4. De même, il est connu que la colle, tout comme d'autres matériaux, ne se comporte pas exactement de la même manière quand elle est sous forme de film mince ou d'éprouvette massive. Des défauts peuvent apparaître dans l'éprouvette massive et assouplir son comportement. D'autre part, des interactions entre la colle et les différents substrats modifient les propriétés de l'interphase. Les résultats expérimentaux obtenus au chapitre III sous-estiment donc probablement la rigidité réelle de la colle. Une étude de sensibilité du pic de cisaillement obtenu dans la colle en fonction de l'épaisseur de la couche de colle, du module de cisaillement ou encore de la variation de température est représentée sur la figure V.11. La déformation théorique obtenue au centre du patch est représentée sur la figure V.11(a) et la valeur du pic de cisaillement obtenu dans la colle au niveau du bord libre est représentée sur la figure V.11(b). Ces résultats sont obtenus en utilisant le modèle développée au chapitre II. Ces résultats sont calculés dans plusieurs configurations :

- pour les températures minimale, moyenne et maximale relevées à la surface du patch (cf. figure V.9(a)) ;
- pour les modules de cisaillement minimal, moyen et maximal correspondant aux trois températures précédentes (cf. figure V.9(b), ainsi que pour le module maximal majoré de 10% et le module minimal minoré de 10% ;
- pour cinq épaisseurs de colles comprises entre 0.05 mm et 0.35 mm.

La déformation maximale au centre du patch ne dépend pas des valeurs mesurées pour l'épaisseur de la colle ou de son module de cisaillement puisque la longueur de transfert est suffisamment courte pour que la déformation maximale soit atteinte dans le patch. Cette déformation ne dépend donc que de la température relevée au niveau du patch. La température maximale du patch correspond approximativement à la température de l'aluminium. La déformation expérimentale relevée dans la zone courante du patch est de $6.8 \cdot 10^{-4}$, elle est donc plus proche du résultat obtenu pour la température maximale mesurée. Ce sont donc les résultats obtenus pour cette température qui sont représentés pour chaque cas présenté dans la suite de l'étude.

Le pic de cisaillement est très sensible aux variations du module de cisaillement ou de l'épaisseur de la colle, comme cela est clairement visible sur la figure V.11(b), où le pic de cisaillement varie de $\pm 6\%$ autour de sa valeur moyenne à épaisseur constante. A module de cisaillement constant, le pic obtenu varie exponentiellement de 13 à



33 MPa au fur et à mesure que l'épaisseur diminue. Cette variable a donc un impact très fort sur le pic de cisaillement obtenu. A titre d'information, le cas correspondant au pic de cisaillement maximal obtenu par ces simulations est comparé aux valeurs expérimentales sur la figure V.12. Il s'agit du cas où le module de cisaillement est majoré de 10 % et où l'épaisseur de colle est supposée atteindre 0.05 mm au niveau du bord libre. Les deux nappes se superposent relativement bien dans ce cas.

V.4.2.3 Remarques sur les résultats obtenus suivant la direction transversale

Le champ de déformations suivant la direction transverse aux fibres prévu par le modèle analytique bidimensionnel est représenté sur la figure V.13. Contrairement à la direction des fibres, la déformation au niveau du bord libre n'est pas négligeable. Ceci s'explique en partie par le coefficient de dilatation élevé du patch dans cette direction. Pour cette raison, le traitement de lissage simplifié appliqué aux images précédentes n'est pas adapté dans ce cas. Un lissage plus complet utilisant une fonction modèle à cinq paramètres indépendants $\{A, B, C, D, E\}$ a donc été testé, mais la faible différence relative entre les déformations au niveau du bord libre et en zone courante rend cette identification difficile. La déformation moyenne expérimentale en

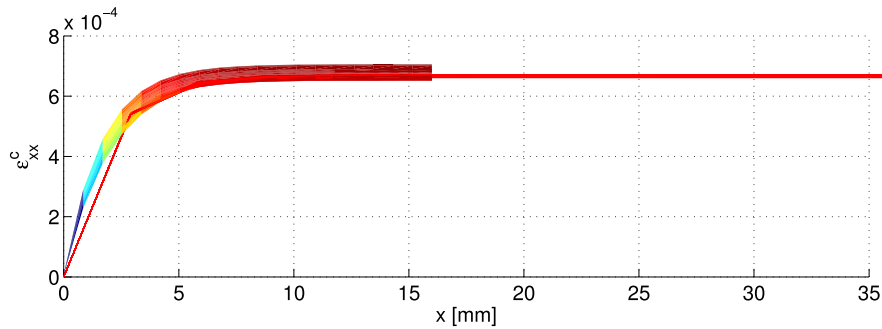


Fig. V.12 Comparaison des déformations obtenues expérimentalement et analytiquement en utilisant les paramètres $e_a = 0.05$ mm et $G_a = 830$ MPa.

zone courante est toutefois mesurée autour de $1.28 \cdot 10^{-3}$, alors que celle prévue par le calcul, au-delà de la zone de transfert, est de $1.37 \cdot 10^{-3}$. Le résultat obtenu est donc satisfaisant, mais toutefois moins précis que celui donné dans la direction des fibres.

Etant donné que la déformation mesurée suivant la direction des fibres dans la zone courante du patch composite correspond bien à la déformation prévue par le calcul, les valeurs des paramètres influençant ce résultat peuvent être supposés corrects. La nature de la distribution est quasi unidimensionnelle, donc seules les épaisseurs du patch composite et du substrat et leurs rigidités suivant la direction x semblent correctement évaluées. La différence pour la direction transverse aux fibres proviendrait alors des paramètres intervenant dans le calcul de la déformation suivant cette direction, en particulier le module d'Young du patch composite dans le sens transverse et son coefficient de Poisson.

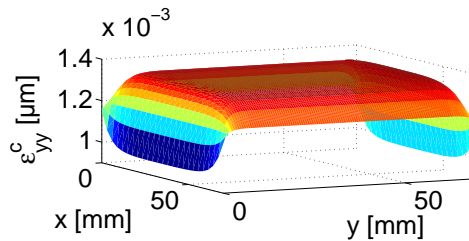
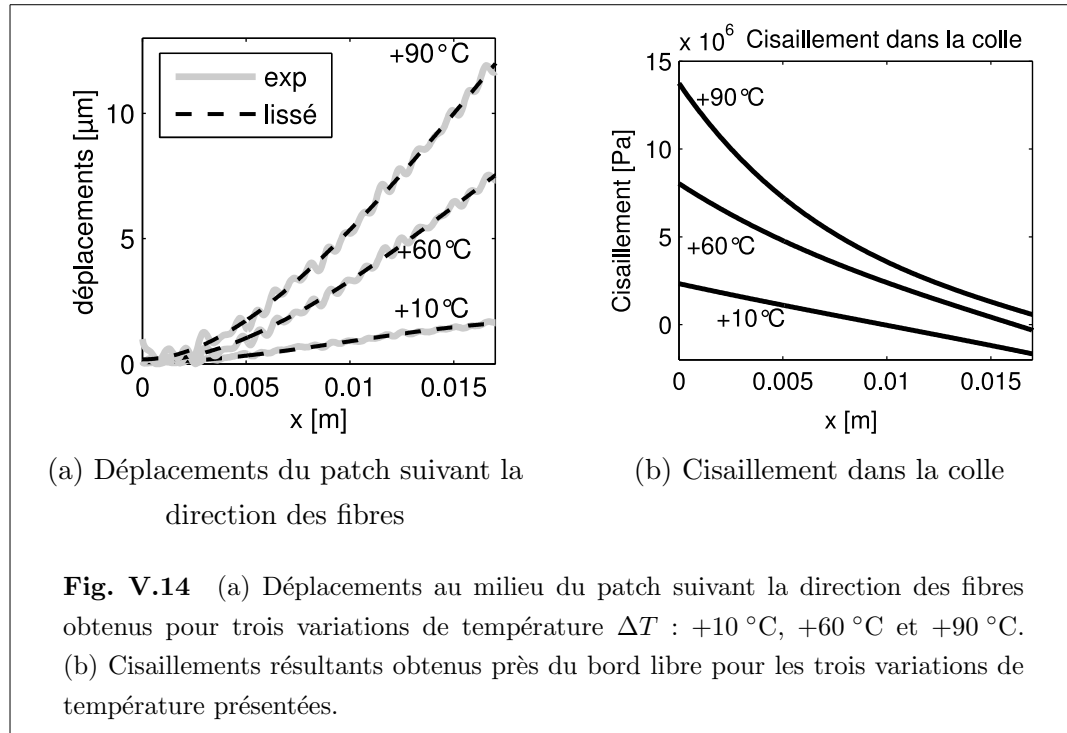


Fig. V.13 Champ de déformations théorique suivant la direction transverse aux fibres. La variation de température imposée est de 50 °C.

V.4.2.4 Influence de la température



Plusieurs résultats obtenus pour la déformation du patch et le cisaillement correspondant dans la colle à différentes températures sont présentés sur la figure V.14. Les contraintes résultant du déplacement du patch sont calculées par dérivations successives de ces déplacements, en utilisant l'équation (II.3). Il y a une nette augmentation des déplacements et du pic de contrainte observé dans la colle lorsque la température augmente. Les déformations successives du patch observées dans la zone courante sont présentées par rapport à l'évolution de la température sur la figure V.15. Dans ce cas, l'essai a été conduit de 20°C à 100°C et plusieurs images intermédiaires ont été analysées. Les déformations observées sont comparées avec celles données par un calcul thermo-élastique unidimensionnel, c'est à dire un calcul élastique dont les propriétés des matériaux, en particulier le module de cisaillement de la colle, sont ajustées à chaque température. En théorie, lorsque le patch est suffisamment long ou la colle suffisamment rigide, la déformation au centre du patch atteint une valeur limite qui est identique partout en dehors des zones de transfert. Cette déformation est alors une fonction linéaire de la variation de température (cf. équations (I.8) et (I.2)). Cependant, dans le cas présent, il y a une température pour laquelle les zones

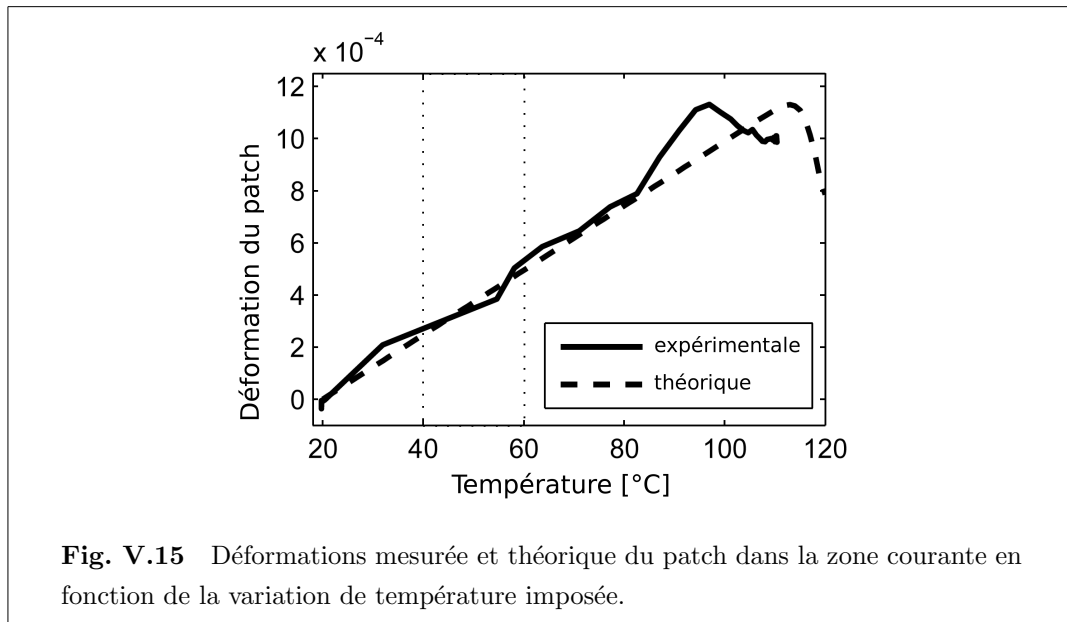


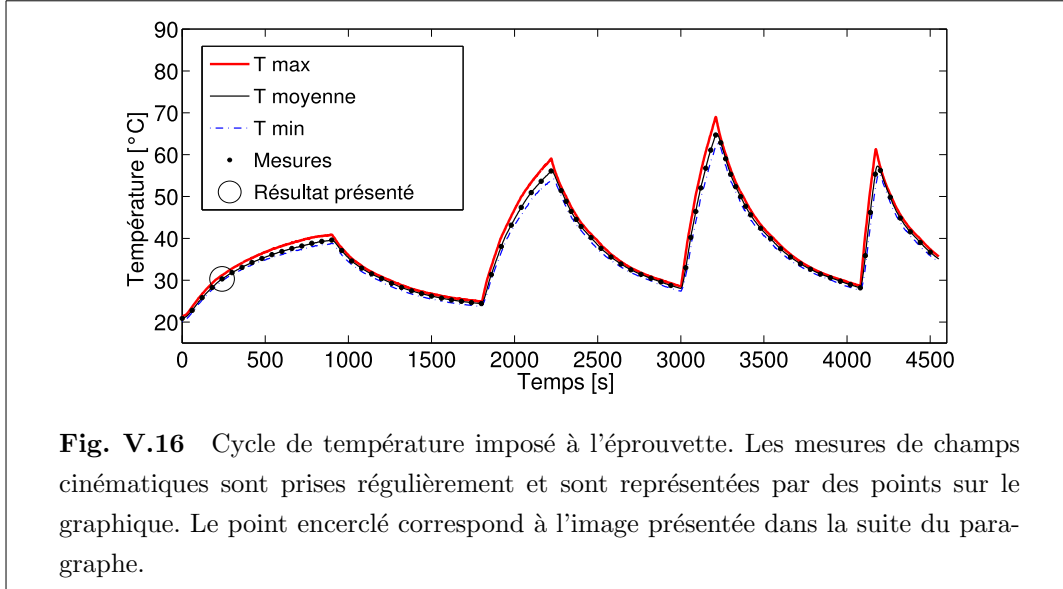
Fig. V.15 Déformations mesurée et théorique du patch dans la zone courante en fonction de la variation de température imposée.

de transfert, à chaque extrémité du patch, se rejoignent. La déformation maximale au centre du patch chute dans ce cas. C'est bien ce phénomène qui est observé à la fois sur la courbe théorique et sur la courbe expérimentale. Le décalage entre les courbes peut avoir plusieurs origines, comme par exemple le gradient de température présent dans l'éprouvette, en effet la température est plus élevée à proximité des résistances qu'au centre du patch, mais aussi l'épaisseur de la colle ou son module de cisaillement.

V.4.3 Résultats obtenus pour le patch croisé $[0/90]_s$

Pour cet essai, l'éprouvette est renforcée symétriquement par deux patchs croisés en carbone/époxyde $[0,90]_s$. Le cycle de température appliqué à l'éprouvette est présenté sur la figure V.16. La zone observée par la caméra cinématique est représentée sur la figure V.18(a). L'image choisie pour illustrer les résultats obtenus est représentée sur la figure V.16. Il s'agit d'un résultat typique obtenu pour cet essai. Le champ de température obtenu à cet instant est présenté sur la figure V.17(a). La température varie d'environ 1 °C sur la surface du patch. La température moyenne relevée est de 30 °C soit une variation de 10 °C par rapport à la température ambiante initiale. Le module de cisaillement de la colle correspondant aux températures mesurées à cet instant et utilisé pour les calculs analytiques est rappelé sur la figure V.17(b). Les résultats expérimentaux obtenus suivant la direction x sont présentés sur la figure V.18

et ceux obtenus suivant la direction y sont présentés sur la figure V.19.



V.4.3.1 Champs de déplacements u_{xx}^c et u_{yy}^c

Les champs de déplacements non-lissés sont présentés sur les figures V.18(a) et V.19(a). Le calcul analytique des déformations dans le patch prévoit une déformation suivant la direction x ou y en zone courante de $1.8 \cdot 10^{-4}$ contre $0.15 \cdot 10^{-4}$ au maximum au niveau des bords libres. Il y a donc un rapport de 10 environ entre la pente des déplacements au niveau de la zone de transfert et en zone courante. Dans une première approche, la méthode simplifiée de lissage des résultats est tout de même utilisée, même si ce rapport est assez faible. La déformation au bord libre est donc supposée nulle même si ce n'est pas rigoureusement le cas. La pente lissée passe donc de zéro au niveau du bord à une pente maximale en zone courante sur quelques millimètres, alors qu'en réalité la pente au niveau des bords n'est pas nulle. La variation de la pente du déplacement entre le bord et le milieu du patch sera donc surestimée, ce qui revient à surestimer la dérivée seconde du déplacement, c'est-à-dire le cisaillement dans le patch.

Les résultats obtenus après lissage colonne par colonne suivant la direction x et ligne par ligne suivant la direction y sont présentés sur les figures V.18(c-d) et V.19(c-d). Comme pour le cas de l'éprouvette unidirectionnelle, deux zones peuvent être distinguées. Loin des bords libres les déplacements suivant chacune des directions

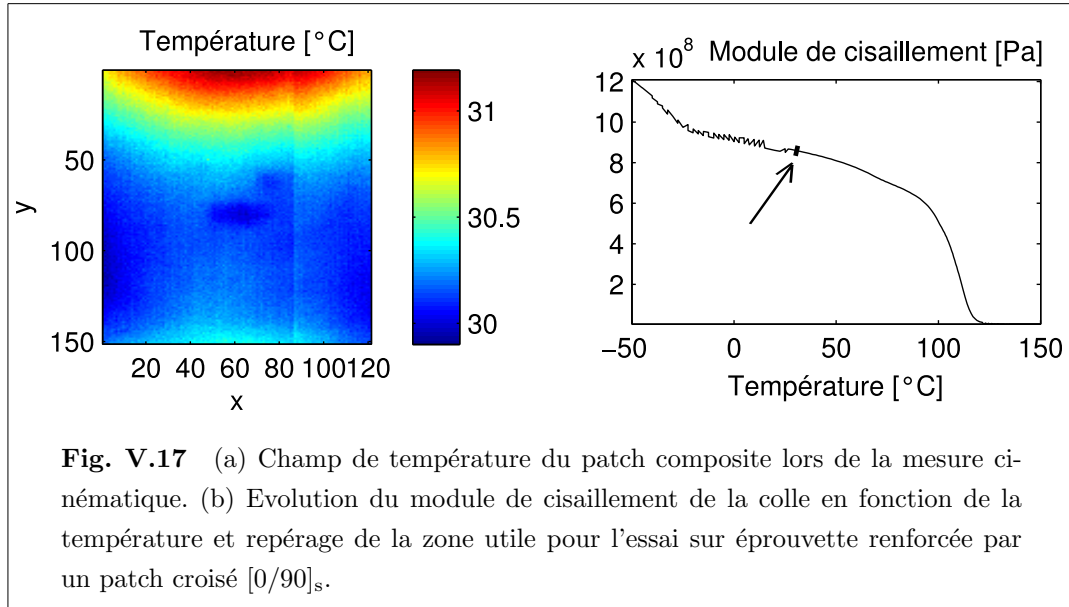


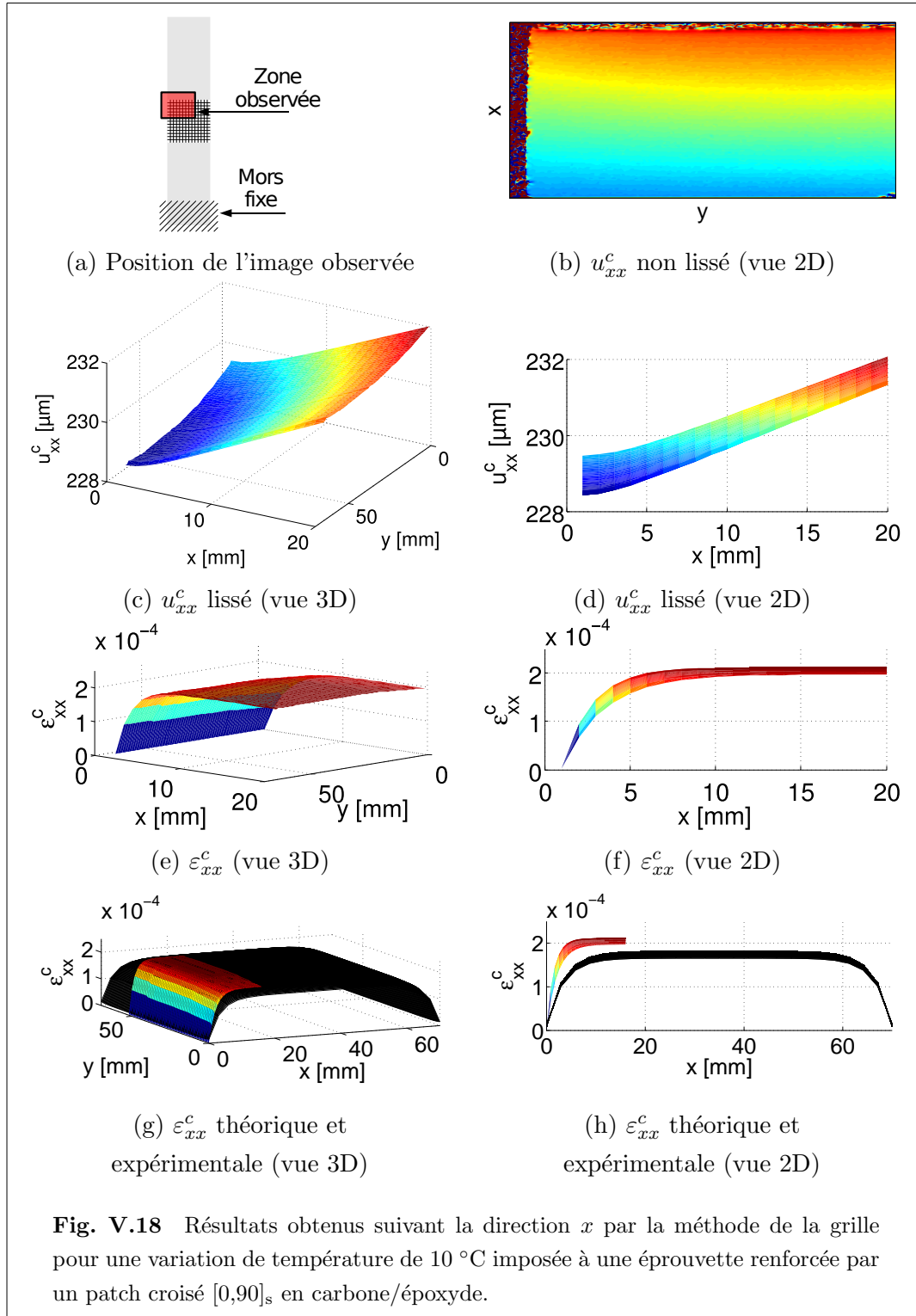
Fig. V.17 (a) Champ de température du patch composite lors de la mesure cinématique. (b) Evolution du module de cisaillement de la colle en fonction de la température et repérage de la zone utile pour l'essai sur éprouvette renforcée par un patch croisé $[0/90]_s$.

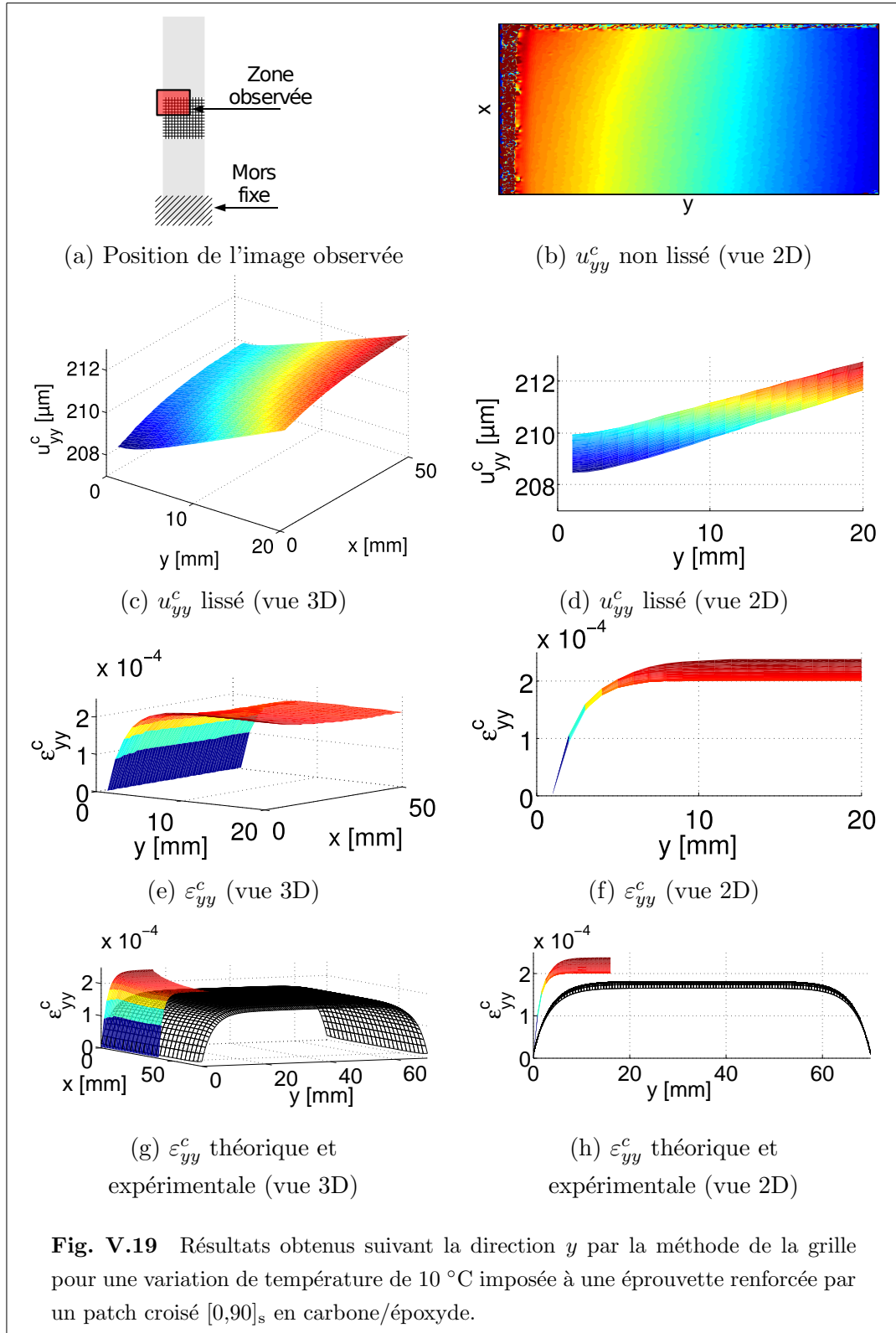
peuvent être assimilés à des droites ce qui correspond à des zones où les déformations sont constantes et ont atteint un pallier maximal. Au niveau des bords libres, le déplacement suivant la direction x est non-linéaire et tend vers une pente nulle au niveau du bord libre. Le résultat observé est identique suivant la direction y .

V.4.3.2 Champs de déformations ε_{xx}^c et ε_{yy}^c

Les champs de déplacements suivant les directions x et y sont dérivés pour obtenir les champs de déformations suivant chaque direction. Les résultats expérimentaux sont présentés sur les figures V.18(e-f) et V.19(e-f). Ils sont ensuite comparés aux résultats théoriques obtenus à l'aide du modèle analytique bidimensionnel sur les figures V.18(g-h) et V.19(g-h).

La déformation en zone courante évaluée par le modèle analytique est la même suivant chaque direction et vaut $1.8 \cdot 10^{-4}$. Les résultats moyens obtenus suivant les directions x et y sont respectivement de $2.1 \cdot 10^{-4}$ et $2.2 \cdot 10^{-4}$. Les résultats expérimentaux sont supérieurs, de l'ordre de 20%, mais toutefois relativement proches suivant chacune des directions. Ces résultats peuvent être expliqués de la même manière que pour les résultats du patch unidirectionnel dans la direction transverse. En effet, les propriétés mécaniques du stratifié sont calculées à partir des propriétés d'un seul pli. Une incertitude sur les propriétés du pli dans le sens transverse se retrouve donc aussi dans le cas du stratifié.





En ce qui concerne les pentes des déformations au niveau des bords libres, qui sont directement liées aux pics de cisaillement dans la colle, les résultats expérimentaux sont supérieurs aux résultats théoriques. Comme précédemment pour les résultats obtenus pour le patch unidirectionnel, cette sous-estimation du modèle analytique peut provenir d'une évaluation imparfaite de l'épaisseur du joint collé ou du module de cisaillement de la colle. Les ordres de grandeurs mesurés restent toutefois assez proches de ceux prévus par le modèle.

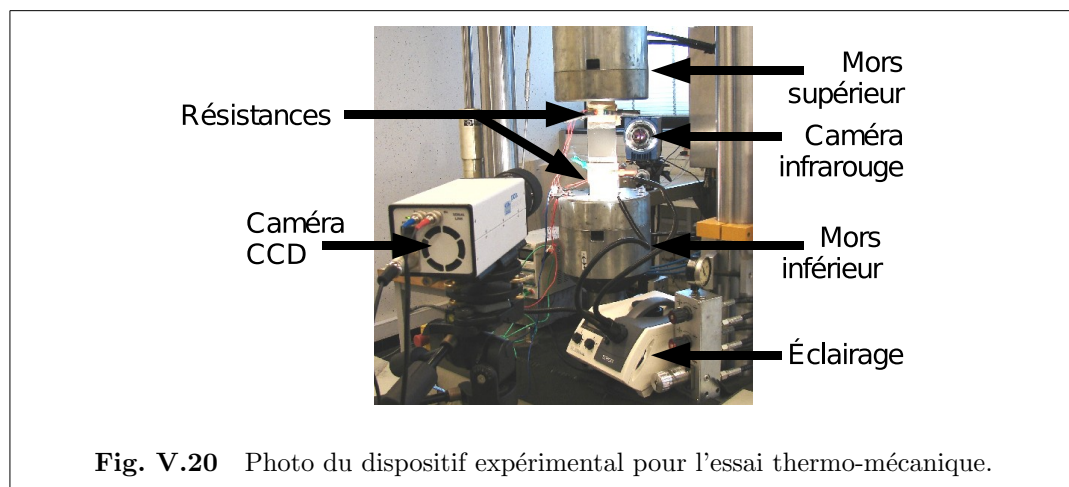
V.5 Essais thermo-mécaniques

V.5.1 Présentation de l'essai

La seconde série d'essais est réalisée en imposant une variation de température à l'éprouvette et un chargement mécanique. La température de l'éprouvette est augmentée à l'aide des résistances chauffantes jusqu'à parvenir à l'équilibre thermique de la structure, l'apport de chaleur compensant les pertes thermiques vers la machine et vers le milieu extérieur. Un chargement mécanique est ensuite appliqué par l'intermédiaire du mors supérieur. Plusieurs vitesses de chargement mécanique ont été testées, ainsi que plusieurs niveaux de température. Le dispositif expérimental est représenté sur la figure V.20. L'objectif est ici de mettre en évidence le comportement viscoélastique de la colle en imposant un chargement mécanique suffisamment rapide pour le déceler.

Il faut préciser, que les éprouvettes utilisées présentent une courbure initiale avec une flèche maximale de l'ordre du millimètre. Le chargement mécanique imposé ici tend donc à aplanir l'éprouvette ce qui apporte une déformation supplémentaire non prise en compte dans les modèles de calcul. Les résultats présentés ci-dessous sont donc des résultats "apparents" et ne peuvent être comparés aux calculs analytiques. Un suivi du déplacement hors-plan de l'éprouvette a été mené lors d'un chargement thermique seul à l'aide d'un comparateur d'une précision de 10 μm . Aucun mouvement n'a pu être décelé. Les résultats des essais thermiques ne sont donc pas remis en cause.

Seul un résultat d'essai typique est présenté dans la suite par un souci de concision. Il s'agit d'un essai conduit à 70 °C. L'effort imposé est de 40 kN, la vitesse d'application du chargement est de 4 kN/s. Le cycle de chargement imposé est présenté sur la figure V.22(a). Il consiste en une montée progressive du chargement à vitesse imposée, puis à une stabilisation pendant quelques minutes. La décharge de



l'éprouvette suit le chemin inverse. Quatre périodes d'acquisition des images de la grille peuvent être distinguées au fil du cycle de chargement. Pendant chaque phase d'acquisition des images, 330 photos sont prises en rafale pendant une période de 40 secondes. Ce nombre correspond à la quantité maximale d'images que la caméra peut stocker en mémoire vive avant d'arriver à saturation. Les périodes d'acquisition sont réparties de la manière suivante :

- juste avant la stabilisation de l'effort et au début du plateau, l'objectif étant d'observer un pic de cisaillement ;
- quelques minutes après la stabilisation de l'effort, l'objectif est ici d'observer une baisse du cisaillement par rapport aux valeurs obtenues au départ ;
- juste avant la décharge complète de l'éprouvette ;
- quelques minutes après le retour à zéro de l'effort imposé.

V.5.2 Evolution du pic de cisaillement dans la colle

Au total, plus de 1300 images ont été prises par essai. Contrairement aux essais thermiques, l'objectif est d'avoir une information sur l'état des déformations de l'éprouvette à un instant précis. Les images ne sont donc pas moyennées et du bruit de capteur est susceptible d'apparaître. Etant donné le coût numérique du traitement complet des images, une étude simplifiée a été réalisée. Seule la zone centrale de l'éprouvette est analysée en moyennant le champ de déplacements obtenu suivant la direction des fibres sur quelques millimètres. De même, les 1300 images n'ont pas toutes été analysées, mais seulement celles situées aux instants où la déformation de l'éprouvette est supposée varier rapidement, c'est-à-dire au cours de la première et

de la troisième série lors des phases de chargement et de décharge de l'éprouvette. Seule une partie des séries 2 et 4 est analysée.

Les déplacements obtenus dans la zone courante de l'éprouvette sont linéaires, la déformation maximale est donc atteinte et peut être calculée en utilisant l'équation (I.8). Le module de cisaillement de la colle et son épaisseur, qui sont les variables sur lesquelles les incertitudes sont les plus grandes n'interviennent pas ici. La déformation du patch prévue analytiquement est d'environ $1.4 \cdot 10^{-3}$ alors que les mesures effectuées atteignent plutôt $1.9 \cdot 10^{-3}$ (cf. figure V.21). Il s'agit d'une déformation apparente incluant la déformation due au redressement de l'éprouvette lors du chargement mécanique. Ces résultats expérimentaux ne peuvent être validés quantitativement par un calcul analytique. Quelques résultats préliminaires sont toutefois présentés ci-après pour mettre en évidence le comportement viscoélastique de la colle de manière qualitative.

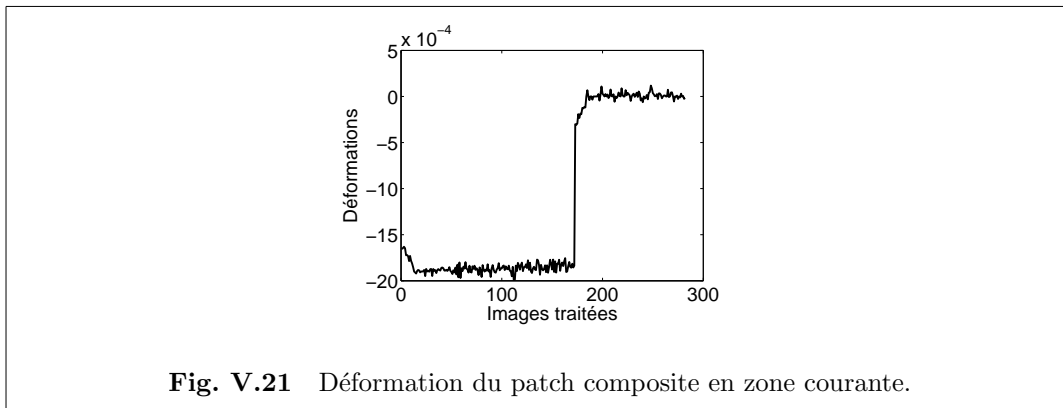
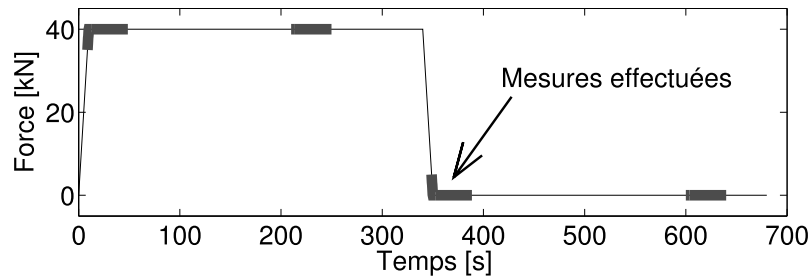


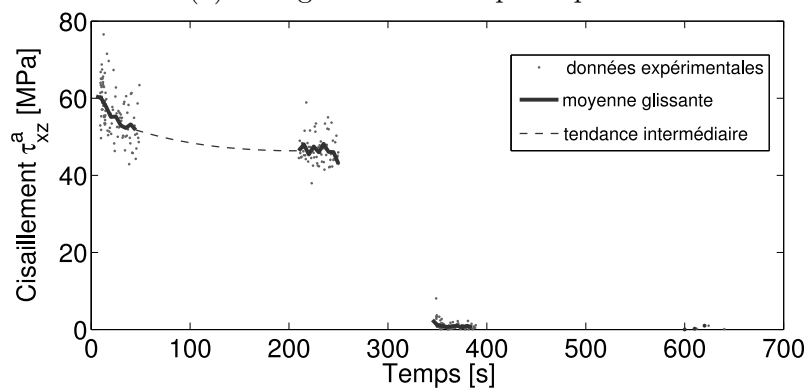
Fig. V.21 Déformation du patch composite en zone courante.

Les déplacements obtenus pour chaque image analysée sont dérivés deux fois (cf. équations (I.7), (I.9) et (I.10)) pour faire apparaître le pic de cisaillement dans la colle. Les résultats obtenus au fil du temps sont présentés sur la figure V.22(b).

Le signal étant très bruité, une moyenne glissante sur 5 secondes est représentée pour chaque période d'acquisition des images. La tendance entre les deux premières zones montre bien une nette diminution du pic de cisaillement apparent, de l'ordre de 25% en cinq minutes. A titre de comparaison, le pic de contrainte estimé par un calcul viscoélastique à 70 °C, en supposant le chargement mécanique constant, est normalement situé entre 20 et 30 MPa. Le résultat expérimental est donc nettement au dessus en raison de la déformation parasite de l'éprouvette. Ce résultat ne peut donc pas être vérifié quantitativement, mais le comportement viscoélastique de la colle à 70 °C est bien mis en évidence expérimentalement.



(a) Chargement mécanique imposé



(b) Pic de cisaillement apparent dans la colle

Fig. V.22 Cycle de chargement mécanique imposé à l'éprouvette et cisaillement obtenu expérimentalement dans la colle par dérivations successives du déplacement du patch.

Ces essais mettent donc expérimentalement en valeur la diminution du pic de cisaillement dans la colle au fil du temps et donc l'impact non négligeable de la viscoélasticité sur la valeur de ce pic. D'autres essais sont toutefois nécessaires pour pouvoir confirmer les résultats prédits par les modèles développés.

V.6 Conclusion

Deux types d'essais sont présentés dans ce chapitre. Ils mettent en valeur deux phénomènes : d'une part certains effets bidimensionnels et d'autre part des effets thermo-viscoélastiques.

Les essais thermiques conduits sur les deux types d'éprouvettes valident en partie les calculs bidimensionnels présentés au chapitre II. Les résultats observés en zone courante du patch sont en bonne adéquation avec les calculs analytiques pour le patch unidirectionnel dans le sens des fibres. En ce qui concerne les autres résultats au niveau des zones de transfert, les paramètres mécaniques du pli unidirectionnel dans la direction transverse aux fibres pourraient expliquer la différence des résultats observés suivant la direction transverse aux fibres et suivant les deux directions pour le patch croisé.

De manière générale, la longueur de la zone de transfert est sous-estimée par les calculs analytiques, quel que soit le patch utilisé. Ceci peut être expliqué d'une part par les incertitudes sur le module de cisaillement de la colle en fonction de la température. Mais une étude de sensibilité rapide a clairement mis en avant l'impact de l'épaisseur du film de colle sur le pic de cisaillement. Ce paramètre étant mal maîtrisé, en particulier au niveau des bords libres, il est difficile d'obtenir expérimentalement et analytiquement les mêmes résultats, à moins de choisir une valeur très faible de cette épaisseur.

Des essais thermo-mécaniques prospectifs ont été menés et ont mis en évidence qualitativement l'impact du comportement viscoélastique de la colle sur l'évolution du pic de cisaillement observé au niveau du bord libre du patch. L'ordre de grandeur des résultats n'est toutefois pas confirmé par les calculs, principalement en raison de la courbure initiale des éprouvettes utilisées. L'étude de l'évolution des résultats obtenus pour d'autres températures et d'autres vitesses de chargement permettrait de compléter ce résultat qualitatif et constitue l'une des perspectives de ce travail.

Conclusions et perspectives

LES PREMIERS résultats présentés dans cette thèse concernent l'extension d'un modèle analytique bidimensionnel de calcul des contraintes dans un assemblage collé de forme rectangulaire à des sollicitations thermiques. Plusieurs exemples traités dans des configurations différentes ont mis en évidence des effets de couplage entre les deux directions de la structure. La résistance du patch à une même sollicitation peut être très différente en fonction du choix de matériau et de la séquence d'empilement du patch.

Des hypothèses simplificatrices classiques consistaient jusqu'alors à supposer que le comportement de chacun des éléments était linéaire élastique. Cependant, une étude expérimentale du comportement de la colle au fil du temps et en fonction de la température a clairement mis en évidence son comportement thermo-viscoélastique, et ce pour des températures et des temps caractéristiques qui correspondent aux conditions normales d'utilisation des patches composites pour renforcer une structure aéronautique. Une loi de comportement tenant compte de ces résultats a donc été développée et intégrée dans un modèle de calcul unidirectionnel de type itératif. Quelques exemples simples ont permis de souligner l'importance de ce comportement sur le pic de cisaillement calculé dans la colle, qui ne peut donc pas être négligé lors d'une étude de dimensionnement.

La confrontation de ces modèles de calcul avec des mesures expérimentales est un point-clé qui a permis de valider les résultats prévus par les calculs pour quelques configurations. La mesure des champs de déplacements à la surface des patches a été obtenue en utilisant la méthode de la grille. Les valeurs mesurées avec cette méthode concordent généralement bien avec les résultats analytiques prévus. Cependant, les effets bidimensionnels ne sont pas très importants pour les matériaux testés dans cette étude et sont noyés dans le bruit des mesures. Les résultats obtenus sont cependant prometteurs et des effets bidimensionnels pourraient facilement être mis en évidence

en utilisant d'autres types de matériaux.

Les essais cumulant à la fois un chargement thermique et un chargement mécanique ont été mis en place afin de détecter un éventuel comportement viscoélastique dû à la colle. Les premiers résultats obtenus sont concluants qualitativement seulement à cause du gauchissement initial des éprouvettes. Ils nécessiteraient d'être améliorés pour pouvoir être réellement confrontés au modèle de calcul proposé.

Des essais thermiques sur des éprouvettes renforcées par d'autres types de patches, comme par exemple avec des patches en GLARE, pourraient mettre en évidence un effet bidimensionnel plus marqué. Des essais mécaniques menés à différentes vitesses et pour différentes températures pourraient mettre en évidence des effets thermo-viscoélastiques. Il faut ajouter que le modèle de calcul thermo-viscoélastique présenté au chapitre IV pourrait facilement être étendu à des chargements mécaniques variables.

En plus de la poursuite des essais de validation des différents modèles développés au cours de cette thèse, d'autres pistes mériteraient encore d'être explorées. Le calcul des contraintes au sein d'un patch croisé a mis en évidence l'importance de connaître les champs de contraintes dans chacun des plis du patch. En poussant ce raisonnement plus loin, il pourrait également être intéressant de connaître les contraintes interlaminaires au sein du patch dues également à la différence des propriétés du patch en passant d'un pli à l'autre. Des premiers travaux ont été menés dans ce sens en collaboration avec un laboratoire de Seoul National University. Un modèle de calcul des champs de contraintes suivant la direction du renforcement et l'épaisseur du patch a été proposé pour le cas où une structure renforcée est soumise à une contrainte longitudinale. Une extension de ce modèle à des chargements d'origine thermique pourrait compléter les travaux présentés ici.

La valeur du pic de cisaillement obtenu dans la colle est également très sensible à l'épaisseur de la couche de colle en particulier au niveau du bord libre. Des mesures effectuées au cours de cette thèse ont montré que cette épaisseur pouvait varier du simple au double avec généralement une valeur plus faible au niveau des bords libres, ce qui accentue encore le pic de cisaillement obtenu. Il pourrait être intéressant de développer un modèle de calcul prenant en compte la variation de l'épaisseur du joint de colle. Une étude statistique pourrait être alors menée pour tenir compte de la variabilité des paramètres les plus importants, en particulier le module de cisaillement de la colle ou l'épaisseur du joint de colle, afin de déterminer les paramètres les plus influents sur la résistance du patch en fonction du type de sollicitation.

D'autres formes de patchs peuvent également être envisagées, notamment l'étude plus complète de patchs elliptiques ou polygonaux ainsi que la prise en compte de la variation progressive d'épaisseur du patch sur les bords. Une étude des phénomènes de fissuration, amorçage et propagation de fissures, pourrait également être envisagée, ainsi que l'analyse des différents modes de défaillance possibles.

L'étude de la plasticité de la colle n'a pas été traitée ici. Une caractérisation plus complète de la colle Redux 312 intégrant ce phénomène pourrait être menée, puis couplée à un modèle de calcul approprié pour analyser son impact sur la résistance des assemblages collés. Enfin, l'étude concrète du collage de patchs sur des structures réelles permettrait d'étudier le comportement de ces assemblages dans des conditions normales d'utilisation.

Bibliographie

- [ACW97] RD. Adams, J. Comyn, and WC. Wake. *Structural Adhesive Joints in Engineering*. Chapman & Hall, 2 edition, 1997.
- [AE92] P. Acker and R. Eymard. Fluage du béton : un modèle plus performant et plus simple à introduire dans les calculs numériques. *Annales de l'ITBTP*, 507:58–74, 1992.
- [AEV⁺04] S. Avril, Ferrier E., A. Vautrin, P. Hamelin, and Y. Surrel. A full-field optical method for the experimental analysis of reinforced concrete beams repaired with composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 35(7-8):873–884, 2004.
- [AFN88] AFNOR. Méthode de préparation de plaques d'adhésifs structuraux pour la réalisation d'éprouvettes d'essai de caractérisation. Technical Report NF T 76-142, 1988.
- [All77] DJ. Allman. A theory for elastic stresses in adhesive bonded lap joints. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 30:415–436, 1977.
- [AM92] RD. Adams and V. Mallick. A method for the stress analysis of lap joints. *The Journal of Adhesion*, 38:199–217, 1992.
- [AP73] RD. Adams and NA. Pepiatt. Effect of poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 8(2):134–139, 1973.
- [Avr01] J. Avram. *Fatigue Response of thin stiffened aluminium cracked panels repaired with bonded composite patches*. PhD thesis, Air Force Institute of Technology, 2001.
- [AW84] RD. Adams and WC. Wake. *Structural Adhesive Joints in Engineering*. Elsevier, 1984.

- [BA] AA. Baker and B. Aktepe. Sensor technique to validate the stress intensity in cracked metallic panels repaired with composite patches. Technical report, Defense Science and Technology Organisation. Australia.
- [Bak84] AA. Baker. Repair of cracked or defective metallic aircraft components with advanced fibre composites - an overview of australian work. *Composite Structures*, 2:153–181, 1984.
- [Bak99] AA. Baker. Bonded composite repair of fatigue-cracked primary aircraft structure. *Composite Structures*, 47:431–443, 1999.
- [BC90] DA. Bigwood and AD. Crocombe. Non-linear adhesive bonded joint design analyses. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 10:31–41, 1990.
- [Ber05] JM. Berthelot. *Matériaux composites: comportement mécanique et analyse des structures*. Lavoisier, 4 edition, 2005.
- [BJ65] GA. Baker Jr. *Adv. Theor. Phys.*, 1:1–58, 1965.
- [BJ88] AA. Baker and R. Jones. *Bonded repairs of aircraft structures*. Martinus Nijhoff Publishers, 1988.
- [BRJ02] AA. Baker, LRF. Rose, and R. Jones. *Advances in the Bonded Composite Repair of Metallic Aircraft Structures*, volume 1. Elsevier, 2002.
- [BW74] ZP. Bazant and ST WU. Rate type creep law of aging concrete based on maxwell chain. *Materials and structures*, 7(37):45–60, 1974.
- [CCS91] S. Cheng, D. Chen, and Y. Shi. Analysis of adhesive-bonded joints with nonidentical adherends. *Journal of Engineering Mechanics*, 117:605–623, 1991.
- [CG00] G. Couarraze and JL. Grossniord. *Initiation à la rhéologie*, chapter 2. Tec & Doc, 3 edition, 2000.
- [CJ95] WK. Chiu and R. Jones. Unified constitutive model for thermoset adhesive, fm73. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 15(3):131–136, 1995.
- [CL94] TF. Coleman and Y. Li. On the convergence of reflective newton methods for large-scale non linear minimization subject to bounds. *Mathematical Programming*, 67(2):189–224, 1994.

- [Cog00] J. Cognard. *Science et technologie du collage*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2000.
- [Com07] Hexcel Composites. Redux 312 - modified epoxy film adhesive - product data, Mars 2007. publication RTA027b.
- [Cou09] P. Coudor. *Analyse fine du mécanisme d'interaction dans les structures souples assemblées par collage*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2009.
- [Cro95] AD. Crocombe. Modelling and predicting the effects of test speed on the strength of joints made with fm73 adhesive. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 15:21–27, 1995.
- [dB44] NA. de Bruyne. The strength of glued joints. *Aircraft Engineering*, pages 115–118, 1944.
- [DD93] A. Dall'Asta and L. Dezi. Mixed variational formulation for the aging viscoelastic problem. In *Creep and shrinkage of concrete, proceeding of the fifth International RILEM Symposium*, pages 591–596, 1993.
- [DEA81] F. Delale, F. Erdogan, and MN. Aydinoglu. Stresses in adhesively bonded joints: A closed-form solution. *Journal of Composite Materials*, 15:249–271, 1981.
- [DGS01] L. Dufort, M. Grédiac, and Y. Surret. Experimental evidence of the cross-section warping in short composite beams under three point bending. *Composite Structures*, 51:37–47, 2001.
- [DM04] G. Dean and R. Mera. Modelling creep in toughened adhesives for finite element analysis, 2004.
- [DMBS07] A. Deb, I. Malvade, P. Biswas, and J. Schroeder. An experimental and analytical study of the mechanical behaviour of adhesively bonded joints for variable extension rates and temperatures. *International Journal Adhesion and Adhesives*, 28:1–15, 2007.
- [DSA05] LFM. Da Silva and RD. Adams. Measurement of the mechanical properties of structural adhesives in tension and shear over a wide range of temperatures. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 19(2):109–141, 2005.
- [dSA07a] LFM. da Silva and RD. Adams. Adhesive joints at high and low temperatures using similar and dissimilar adherends and dual adhesives. *International Journal Adhesion and Adhesives*, 27:216–226, 2007.

- [dSA07b] LFM. da Silva and RD. Adams. Joint strength predictions for adhesive joints to be used over a wide temperature range. *International Journal Adhesion and Adhesives*, 27:362–379, 2007.
- [dSA07c] Lucas F.M. da Silva and R.D. Adams. Techniques to reduce the peel stresses in adhesive joints with composites. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 27:227–235, 2007.
- [dSAG04] LFM. da Silva, RD. Adams, and M. Gibbs. Manufacture of adhesive joints and bulk specimens with high-temperature adhesives. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 24:69–83, 2004.
- [DSDNA⁺09] LFM. Da Silva, PJC Das Neves, RD. Adams, A. Wang, and JK. Spelt. Analytical models of adhesively bonded joints - part ii: Comparative study. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 29:331–341, 2009.
- [DSDNAS09] LFM. Da Silva, PJC Das Neves, RD. Adams, and JK. Spelt. Analytical models of adhesively bonded joints - part i: Literature survey. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 29:319–330, 2009.
- [Duo04] CN. Duong. An engineering approach to geometrically nonlinear analyses of a one-sided composite repair under thermo-mechanical loading. *Composite Structures*, 64:13–21, 2004.
- [Duo06] CN. Duong. A unified approach to geometrically nonlinear analysis of tapered bonded joints and doublers. *International Journal of Solids and Structures*, 43:3498–3526, 2006.
- [DY02] CN. Duong and J. Yu. An analytical estimate of thermal effects in a composite bonded repair: plane stress analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 39:1003–1014, 2002.
- [DY03a] CN. Duong and J. Yu. Thermal stresses in a one-sided bonded repair by a plate inclusion model. *Journal of Thermal Stresses*, 26:457–466, 2003.
- [DY03b] CN. Duong and J. Yu. Thermal stresses in one-sided bond repair: geometrically nonlinear analysis. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 40:197–209, 2003.
- [Esh57] JD. Eshelby. The determination of the elastic field for an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of Royal Society (London)*, A 241:376–396, 1957.

- [FTM99] Y. Frostig, OT. Thomsen, and F. Mortensen. Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet-high-order theory approach. *Journal of Engineering Mechanics*, 125:1298–1307, 1999.
- [FVCM93] R. Fulchiron, V. Verney, P. Cassagnau, and A. Michel. Deconvolution of polymer melt stress relaxation by the padé-laplace method. *Journal of rheology*, 37:17–34, 1993.
- [GG75] GC. Grimes and LF. Greimann. Analysis of discontinuities, edge effects, and joints. *Compos. Mater.*, v:135–230, 1975.
- [GJGW59] DG. Gardner, Gardner JC., Laush G., and Meinke WW. Method for the analysis of multicomponent exponential decay curves. *Journal of Chemical Physics*, 31:978–986, 1959.
- [GMR01] G. Goulios and Z. Mariola-Riga. Composite patch repairs for commercial aircraft : Compres. *Air and Space Europe 3*, pages 143–147, 2001.
- [GOTNS99] R. Gutierrez-Osuna, H. Troy Nagle, and SS. Schiffman. Transient response analysis of an electronic nose using multi-exponential models. *Sensors and actuators*, B 61:170–182, 1999.
- [GPS99] M. Grédiac, F. Pierron, and Y. Sirel. Novel procedure for complete in-plane composite characterization using a t-shaped specimen. *Experimental Mechanics*, 39:142–149, 1999.
- [GR44] M. Goland and E. Reissner. The stresses in cemented joints. *Journal of applied mechanics*, 66:A17–A27, 1944.
- [HL99] L. Hollaway and MB. Leeming. *Strengthening of reinforced concrete structures: Using externally-bonded FRP composites in structural and civil engineering*. Woodhead Publishing Limited, 1999.
- [HS73a] LJ. Hart-Smith. Adhesive-bonded double-lap joints. Technical Report CR-112235, NASA, 1973.
- [HS73b] LJ. Hart-Smith. Adhesive-bonded single-lap joints. Technical Report CR-112236, NASA, 1973.
- [JDV99] B. Jurkiewicz, JF. Destrebecq, and A. Vergne. Incremental analysis of time-dependent effects in composite structures. *Computers and Structures*, 73:425–435, 1999.

- [Jea93] J.P. Jeandrau. Technologie du collage structural pour les applications en mécanique. *Publications CETIM, Etablissement de Saint-Etienne*, 1993.
- [Kin87] A.J. Kinloch. *Adhesion and Adhesives*. New-York : Chapman & Hall, 1987.
- [Kol03] Z. Kolakowski. On some aspects of the modified tsai-wu criterion in thin-walled composite structures. *Thin-walled structures*, 41:357–374, 2003.
- [Leb04] J.L. Leblanc. *Propriétés mécaniques des polymères*. editoo, 4 edition, 2004.
- [LS98] K.S. Liu and Tsai SW. A progressive quadratic failure criterion for a laminate. *Composites Science and Technology*, 58:1023–1032, 1998.
- [MBA78] H. Monternot, D. Bénazet, and H. Ancenay. *Guide du collage*. CETIM, 1978.
- [MBG06] J.D. Mathias, X. Balandraud, and M. Grédiac. Experimental investigation of composite patches with a full-field measurement method. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 37:177–190, 2006.
- [MDB⁺07] M.P. Moutrille, K. Derrien, D. Baptiste, X. Balandraud, and M. Grédiac. Through-thickness strain field measurement in a composite/aluminium adhesive joint. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 2007. In Press - Available online.
- [MGB06] J.D. Mathias, M. Grédiac, and X. Balandraud. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches. *International Journal of Solids and Structures*, 43:6921–6947, 2006.
- [MS09] P. Majda and J. Skrodzewicz. A modified creep model of epoxy adhesive at ambient temperature. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 29:396–404, 2009.
- [MT02] F. Mortensen and O.T. Thomsen. Analysis of adhesive bonded joints: a unified approach. *Composites Science and Technology*, 62:1011–1031, 2002.
- [Nou93] J.P. Nougier. *Méthodes de calcul numérique*, chapter 9. Masson, 3 edition, 1993.

- [OE78] IU. Ojalvo and HL. Eidinoff. Bond thickness effects upon stresses in single lap adhesive joints. *AIAA Journal*, 16:204–211, 1978.
- [Opl94] DW. Oplinger. Effects of adherent deflection in single lap joints. *International Journal of Solids and Structures*, 31(18):2565–2587, 1994.
- [PASV98] F. Pierron, E. Alloba, Y. Surrel, and A. Vautrin. Whole-field assessment of the effects of boundary conditions on the strain field in off-axis tensile testing of unidirectional composites. *Composites Science and Technology*, 58:1939–1947, 1998.
- [PBGR08] ML. Pastor, X. Balandraud, M. Grédiac, and JL. Robert. On the fatigue response of aluminium specimens reinforced with carbon-epoxy patches. *Composite Structures*, 83(3):237–246, 2008.
- [PG04] JL. Piro and M. Grédiac. Producing and transferring low-spatial-frequency grids for measuring displacement fields with moiré and grid methods. *Experimental techniques*, 28(4):23–26, 2004.
- [Pir74] J. Pirvics. Two dimensional displacement-stress distributions in adhesive bonded composite structures. *The Journal of Adhesion*, 6:207–228, 1974.
- [Pre04] JL. Prensier. *Description de l’outil de corrélation d’images numériques*. <http://www.si.ens-cachan.fr/>, 2004.
- [PW82] D. Peretz and Y. Weitsman. The nonlinear viscoelastic characterization of fm-73 adhesive. *Journal of rheology*, 26(3):245–261, 1982.
- [PW83] D. Peretz and Y. Weitsman. The nonlinear thermoviscoelastic characterization of fm-73 adhesive. *Journal of rheology*, 27(2):97–114, 1983.
- [Rod96] GJ. Rodin. Eshelby’s inclusion problem for polygons and polyhedra. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 44:1977–1995, 1996.
- [Ros81] LRF. Rose. An application of the inclusion analogy for bonded reinforcements. *International Journal of Solids and Structures*, 17(8):827–838, 1981.
- [RSN98] N. Rastogi, SR. Soni, and A. Nagar. Thermal stresses in aluminum-to-composite double-lap bonded joints. *Advances in Engineering Software*, 29(3-6):273–281, 1998.
- [RV75a] JW. Renton and JR. Vinson. The efficient design of adhesive bonded joints. *The Journal of Adhesion*, 7:175–193, 1975.

- [RV75b] JW. Renton and JR. Vinson. On the behavior of bonded joints in composite material structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 7:41–52, March 1975.
- [SASS00] V. Safavi-Ardebili, JK. Spelt, and AN. Sinclair. Experimental investigation of the interphase in an epoxy-aluminum system. *Journal of Adhesion*, 62:93–111, 2000.
- [Sav07] G. Savage. Failure prevention in bonded joints on primary load bearing structures. *Engineering Failure Analysis*, 14:321–348, 2007.
- [SK03] SS. III Smeltzer and EC. Klang. Analysis of elastic-plastic adhesively bonded joints with anisotropic adherends. In *Proceedings of the American Society for Composites 18th Annual Technical Conference*, 2003.
- [Skr86] J. Skrzypek. *Plasticity and creep*. Warsaw: PWN, 1986.
- [SLNT00] T. Sawa, J. Liu, K. Nakano, and J. Tanaka. A two-dimensional stress analysis of single-lap adhesive joints of dissimilar adherends subjected to tensile loads. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 14:43–66, 2000.
- [Sob93] WT. Sobol. Analysis of variance for 'component stripping' decomposition of multiexponential curves. *Computer methods and Programs in Biomedecine*, 39(3-4):243–257, 1993.
- [Sri75] S. Srinivas. Analysis of bonded joints. Technical Report TN D 7855, NASA Technical Note, April 1975.
- [Sur94] Y. Surrel. Moiré and grid methods in optics : a signal-processing approach. In *Interferometry '94 : Photomechanics*, volume 2342, pages 213–220, 1994. The International Society for Optical Engineering, SPIE.
- [Sur01] Y. Surrel. Méthodes optiques pour la mesure de champs cinématiques : résolution et résolution spatiale. In *Quinzième Congrès Français de Mécanique Avancée*, Sept. 2001.
- [TDG05] E. Toussaint, JF. Destrebecq, and M. Grédiac. A detailed study of crack propagation in cement-based fibre composite beams under bending. *Cement and Concrete Composites*, 27(3):399–411, 2005.
- [TH80] SW. Tsai and HT. Hahn. *Introduction to composite materials*. Technomic, 1980.

- [TM95] MY. Tsai and J. Morton. The effect of a spew fillet on adhesive stress distribution in laminated composite single-lap joints. *Composite Structures*, 32:123–131, 1995.
- [Ton96] L. Tong. Bond strength for adhesive-bonded single-lap joints. *Acta Mechanica*, 117:101–113, 1996.
- [Vol38] O. Volkersen. Die niekraft in zugbeanspruchten mit konstanten laschenquerschritten. *Luftfahrtforschung*, 15:41–47, 1938.
- [Wah73] T. Wah. Stress distribution in a bonded anisotropic lap joint. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, 95:174–181, 1973.
- [WCSS03] RX. Wang, J. Cui, AN. Sinclair, and JK. Spelt. Strength of adhesive joints with adherend yielding: I. analytical model. *The Journal of Adhesion*, 79:23–48, 2003.
- [WE99] CH. Wang and D. Erjavec. Geometrically linear analysis of the thermal stresses in one-sided composite repairs. *Journal of Thermal Stresses*, 23:833–851, 1999.
- [WR00] AS. Wineman and KR. Rajagopal. *Mechanical response of polymers*. Cambridge University Press, 2000.
- [WRCB00] CH. Wang, LRF. Rose, R. Callinan, and AA. Baker. Thermal stresses in a plate with a circular reinforcement. *International Journal of Solids and Structures*, 37(33):4577–4599, 2000.
- [WY05] Guocai Wu and JM. Yang. The mechanical behavior of glare laminates for aircraft structures. *Journal of the minerals, metals and materials society*, 57:72–79, 2005.
- [YCR01] XX. Yu, AD. Crocombe, and G. Richardson. Material modelling for rate-dependent adhesives. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 21:179–210, 2001.
- [YP96] C. Yang and SS. Pang. Stress-strain analysis of single-lap composite joints under tension. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 118:247–256, 1996.

Table des figures

I.1	Réparation effectuée sur un F 111 [BJ88].	6
I.2	Réparation effectuée sur un Mirage [BJ88].	6
I.3	Réparation effectuée sur un Hercules [BJ88].	7
I.4	Exemples de patchs riveté et collé d'après [Bak84].	7
I.5	Les différents états d'un polymère caractérisés par leur module de cisaillement en fonction de la température. Les polymères réticulés ne deviennent pas liquides et restent caoutchouteux jusqu'à décomposition (droite en pointillés) [Cog00]. Le niveau du plateau caoutchoutique baisse avec l'augmentation du caractère amorphe du polymère.	10
I.6	Cycle de mise en oeuvre de la Redux 312 L	12
I.7	Configurations de joints collés classiquement étudiés dans la littérature [Cou09].	17
I.8	Modèle unidimensionnel d'une structure renforcée par un patch composite.	18
I.9	Equilibre représentatif du patch composite.	19
I.10	Modèle bidimensionnel d'une structure renforcée par un patch composite soumise à un chargement mécanique. Deux cas de chargement ont été étudiés [MGB06].	21
II.1	Moitié supérieure de la structure hétérogène soumise à un chargement thermique.	33
II.2	Equilibre d'une partie représentative du patch composite.	35
II.3	Contraintes calculées pour un chargement thermique de -100°C . Le renfort isotrope présente le même coefficient de Poisson que le substrat métallique. Les solutions 1D et 2D sont superposées.	44

II.4	Contraintes calculées pour un chargement thermique de $-100\text{ }^{\circ}\text{C}$ dans le cas d'un patch unidirectionnel carbone/époxyde. Les fibres sont orientées suivant la direction x . (a-d) Superposition des solutions analytiques 1D (en traits gras) et 2D (en traits fins). (e-h) Superposition des résultats du modèle analytique 2D (en blanc) et des résultats obtenus par éléments finis (en gris). Seul un quart de la structure est représenté.	47
II.5	Distribution des contraintes - cas d'un patch croisé $[0, 90]_s$ carbone/époxyde.	51
II.6	Lors d'une baisse de température, l'aluminium et les plis à 90° ont tendance à se comprimer plus que les plis à 0° ce qui mène à des contraintes de traction dans l'aluminium et les plis à 90°	52
II.7	Distribution des contraintes - cas d'un patch unidirectionnel bore/époxyde.	53
II.8	Distribution des contraintes - cas d'un patch en GLARE.	54
II.9	Lignes de niveau du critère de Tsai-Wu pour le patch unidirectionnel en carbone/époxyde pour $\sigma_{xy} = 0$	58
II.10	Critères de Tsai-Wu calculés pour chacun des patches étudiés : l'unidirectionnel carbone/époxyde (a-b), le croisé $[0, 90]_s$ carbone/époxyde (c-d), l'unidirectionnel bore/époxyde (e-f), le GLARE (g-h).	59
II.11	Critères de Von Mises calculés pour chacun des patches étudiés dans la colle puis dans l'aluminium : l'unidirectionnel carbone/époxyde (a-b), le croisé $[0, 90]_s$ carbone/époxyde (c-d), l'unidirectionnel bore/époxyde (e-f), le GLARE (g-h).	62
II.12	Valeurs maximales des critères de rupture atteints pour chacun des patches. Deux cas de chargement : $+100\text{ }^{\circ}\text{C}$ ou $-100\text{ }^{\circ}\text{C}$ sont distingués pour le calcul du critère de Tsai-Wu dans le patch. Le critère de Von Mises est utilisé pour la colle et l'aluminium. Les deux cas traités ($+100\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $-100\text{ }^{\circ}\text{C}$) donnent les mêmes résultats pour ces deux composants.	63
III.1	(a) Fabrication d'éprouvette de colle suivant la norme NF T 76-142 [AFN88] (b) Méthode de fabrication d'éprouvettes massives de colle sous vide d'air, adaptée de "open vacuum release technique" [dSAG04].	71

III.2	Cycles de pression et de température appliqués lors de la fabrication de l'éprouvette.	71
III.3	Photos de quelques éprouvettes de colle Redux 312 réalisées.	72
III.4	Evolution du flux de chaleur lors de la phase de polymérisation de l'échantillon.	73
III.5	L'évolution du flux de chaleur mesuré lors d'un essai de DSC, pour plusieurs balayages de température, permet de déterminer la température de transition vitreuse T_g par la méthode des tangentes aux alentours de 105 °C.	74
III.6	Illustration de la méthode des tangentes pour la recherche de la température de transition vitreuse T_g . Le T_g est relevé au point d'intersection entre la courbe et la droite passant au milieu des deux tangentes à la courbe aux points d'inflexion.	75
III.7	Montage de l'éprouvette massive dans un rhéomètre lors d'un essai. . .	76
III.8	Module de cisaillement dynamique de la Redux 312 entre -50 et +70 °C, représenté avec une échelle logarithmique puis linéaire. . . .	77
III.9	Relaxation du module de cisaillement moyen au cours du temps pour cinq températures.	78
III.10	Evolution du module de cisaillement au cours du temps pour trois essais conduits à 50 °C.	79
III.11	Rapport du module viscoélastique de la colle Redux 312 sur son module élastique, en fonction de la température.	79
III.12	Illustration de la méthode de pelage [CG00].	82
III.13	Résultats successifs obtenus par la méthode de pelage pour l'essai de relaxation à -50 °C.	83
III.14	Résultats obtenus par la méthode de Padé-Laplace.	89
III.15	Résultats obtenus par la méthode d'optimisation.	91
III.16	Comparaison des méthodes d'identification des paramètres	91
III.17	Algorithme utilisé pour déterminer les α_i et $G_i(T)$	92
III.18	Etude de convergence pour un nombre croissant de branches (élastique et viscoélastiques).	95

III.19	Comparaison de l'évolution des modules de cisaillement théoriques et expérimentaux en fonction du temps et de la température sur 5 s (a) puis sur 300 s (b). (c) Comparaison du module élastique et de la somme des modules viscoélastiques en fonction de la température, puis détail des modules viscoélastiques branche par branche.	96
IV.1	Schéma de l'assemblage collé soumis à une variation de température ΔT variable en fonction du temps et à un chargement mécanique constant.	102
IV.2	Modèle de Maxwell utilisé, avec $\alpha_i = \frac{G_i}{\eta_i}$	103
IV.3	Evolution du pic de cisaillement $\tau_{xz}^a(t)$ dans la colle en fonction de la discrétisation temporelle. Il n'y a plus d'évolution pour des pas inférieurs à 210 ms.	114
IV.4	Distribution de la contrainte longitudinale σ_{xx}^c dans le patch composite en fonction de la discrétisation spatiale.	114
IV.5	Cas élastique	117
IV.6	Cas thermoélastique	119
IV.7	Cas viscoélastique	121
IV.8	Cas thermo-viscoélastique	123
IV.9	Comparaison des méthodes de calcul	127
V.1	Illustration de la méthode de la grille.	133
V.2	Illustration de la méthode de corrélation d'images [Pre04].	133
V.3	Le champ de déplacements suivant la direction x est lissé pour chaque abscisse y . Les résultats avant et après lissage obtenus suivant la ligne AA' sont comparés sur la figure (b) pour plusieurs niveaux de chargements testés.	137
V.4	Relevé des coordonnées sur les surfaces extérieures des patches sur une éprouvette. La distance entre ces surfaces permet de déterminer l'évolution de l'épaisseur de la couche de colle.	138
V.5	Schéma des deux faces des éprouvettes utilisées.	139
V.6	Image typique de la grille. Chaque période est discrétisée sur 5 pixels de la caméra.	140
V.7	Photo du dispositif expérimental pour l'essai thermique.	141

V.8	Cycle de température imposé à l'éprouvette. Les mesures de champs cinématiques sont prises régulièrement et sont représentées par des points sur le graphique. Le point encerclé correspond à l'image présentée dans la suite du paragraphe.	142
V.9	(a) Champ de températures du patch composite lors de la mesure cinématique. (b) Evolution du module de cisaillement de la colle en fonction de la température et repérage de la zone utile pour l'essai sur éprouvette unidirectionnelle.	142
V.10	Résultats obtenus par la méthode de la grille pour une variation de température de 50 °C imposée à une éprouvette renforcée par un patch unidirectionnel en carbone/époxyde.	143
V.11	Etude de sensibilité de quelques paramètres sur la déformation obtenue dans le patch et le cisaillement dans la colle.	146
V.12	Comparaison des déformations obtenues expérimentalement et analytiquement en utilisant les paramètres $e_a = 0.05$ mm et $G_a = 830$ MPa.	147
V.13	Champ de déformations théorique suivant la direction transverse aux fibres. La variation de température imposée est de 50 °C.	147
V.14	(a) Déplacements au milieu du patch suivant la direction des fibres obtenus pour trois variations de température ΔT : +10 °C, +60 °C et +90 °C. (b) Cisaillements résultants obtenus près du bord libre pour les trois variations de température présentées.	148
V.15	Déformations mesurée et théorique du patch dans la zone courante en fonction de la variation de température imposée.	149
V.16	Cycle de température imposé à l'éprouvette. Les mesures de champs cinématiques sont prises régulièrement et sont représentées par des points sur le graphique. Le point encerclé correspond à l'image présentée dans la suite du paragraphe.	150
V.17	(a) Champ de température du patch composite lors de la mesure cinématique. (b) Evolution du module de cisaillement de la colle en fonction de la température et repérage de la zone utile pour l'essai sur éprouvette renforcée par un patch croisé $[0/90]_s$	151
V.18	Résultats obtenus suivant la direction x par la méthode de la grille pour une variation de température de 10 °C imposée à une éprouvette renforcée par un patch croisé $[0,90]_s$ en carbone/époxyde.	152

V.19	Résultats obtenus suivant la direction y par la méthode de la grille pour une variation de température de $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ imposée à une éprouvette renforcée par un patch croisé $[0,90]_s$ en carbone/époxyde.	153
V.20	Photo du dispositif expérimental pour l'essai thermo-mécanique.	155
V.21	Déformation du patch composite en zone courante.	156
V.22	Cycle de chargement mécanique imposé à l'éprouvette et cisaillement obtenu expérimentalement dans la colle par dérivations successives du déplacement du patch.	157
A1.1	Discretisation de l'intervalle $[0, L]$ en $n + 1$ intervalles.	183

Liste des tableaux

I.1	Exemples de réparations par patchs composites effectuées par la RAAF d'après [Avr01, BJ88].	5
I.2	Propriétés des polymères [MBA78].	9
I.3	Propriétés mécaniques des colles époxydes	11
I.4	Propriétés mécaniques de la Redux 312	11
I.5	Les modèles rhéologiques courants.	14
I.6	Synthèse des approches disponibles dans la littérature concernant les joints à simple recouvrement [DSDNAS09].	16
II.1	Propriétés thermoélastiques des matériaux extraites de [TH80] pour les patchs bore/époxyde et carbone/époxyde, de [RSN98] pour le GLARE. L'aluminium est un alliage 2024-T3. Les données pour la colle sont extraites de [MGB06].	43
II.2	Résistances des patchs composites d'après [TH80] pour le carbone/époxyde et le bore/époxyde, et d'après [WY05] pour le GLARE. Les propriétés de la colle Redux 312 sont fournies par le fabricant Hexcel Composites [Com07]. Les données sont en MPa.	44
III.1	Résultats successifs obtenus à l'aide de la méthode de Padé-Laplace. Les branches valables sont signalées dans la dernière colonne.	88
III.2	Paramètres obtenus en optimisant deux branches viscoélastiques.	95
III.3	Paramètres obtenus en optimisant cinq branches viscoélastiques.	96
IV.1	Valeur maximale du pic de cisaillement obtenu dans la colle en fonction du modèle choisi pour deux vitesses de variation de la température.	126

Annexes

Sommaire

A.1	Résolution numérique d'une équation différentielle de second ordre	183
A.2	Résolution du système d'équations différentielles II.11 .	185
A.2.1	Système d'équations différentielles couplées à résoudre . .	185
A.2.2	Recherche de σ_{xx}^c le long des frontières Γ_2 et Γ_4	186
A.2.3	Solution pour σ_{xx}^c sous forme de séries	186
A.2.4	Solution le long des frontières	188
A.2.5	Détermination de Φ_m	189

A.1 Résolution numérique d'une équation différentielle de second ordre

La méthode de résolution suivante est extraite de [Nou93]. Elle concerne la résolution d'une équation différentielle du second ordre avec conditions aux limites. Ce type de problème se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires à matrice tridiagonale.

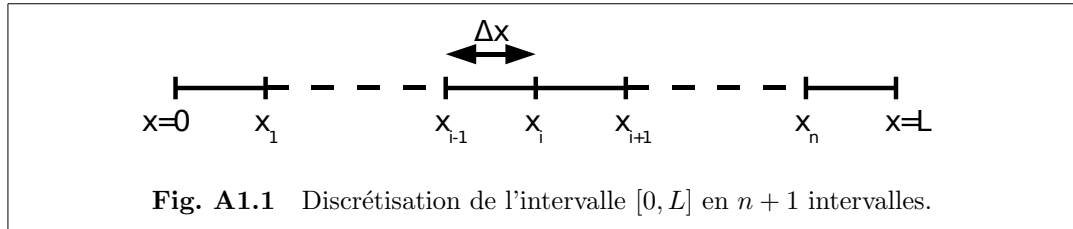
L'équation différentielle étudiée ici s'écrit de la manière suivante :

$$A(x)\frac{d^2y}{dx^2} + B(x)\frac{dy}{dx} + C(x)y = D(x) \quad (\text{A1.1})$$

Les conditions aux limites portent sur la fonction y , supposée connue en 0 et en L :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y(L) = y_L \end{cases} \quad (\text{A1.2})$$

L'intervalle $[0, L]$ est divisé en $n+1$ intervalles égaux Δx (cf. figure A.1).



Les formules d'ordre 2 aux différences centrées sont utilisées pour écrire les dérivées successives de la fonction y , soit :

$$\begin{cases} y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \\ y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \end{cases} \quad (\text{A1.3})$$

L'équation (A1.1) s'écrit donc en $x = x_i$, pour $i = 1, 2, \dots, n$:

$$A_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + B_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} + C_i y_i = D_i \quad (\text{A1.4})$$

$$\left[\frac{A_i}{\Delta x^2} - \frac{B_i}{2\Delta x}\right]y_{i-1} + \left[C_i - \frac{2A_i}{\Delta x^2}\right]y_i + \left[\frac{A_i}{\Delta x^2} + \frac{B_i}{2\Delta x}\right]y_{i+1} = D_i \quad (\text{A1.5})$$
$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = D_i \quad (\text{A1.6})$$
$$\begin{cases} a_1 y_0 + b_1 y_1 + c_1 y_2 = D_1 \\ a_n y_{n-1} + b_n y_n + c_n y_L = D_n \end{cases} \implies \begin{cases} b_1 y_1 + c_1 y_2 = D_1 - a_1 y_0 \\ a_n y_{n-1} + b_n y_n = D_n - c_n y_L \end{cases} \quad (\text{A1.7})$$
$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ & a_3 & b_3 & c_3 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 - a_1 y_0 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n - c_n y_L \end{bmatrix} \quad (\text{A1.8})$$

Il est également possible d'utiliser la même méthode pour une discrétisation non régulière du segment $[0, L]$, ce qui permet de gagner en temps de calcul et en précision dans les zones à fort gradient.

A.2 Résolution du système d'équations différentielles II.11

A.2.1 Système d'équations différentielles couplées à résoudre

L'objectif est de trouver la solution du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c}{\partial x^2} = A\sigma_{xx}^c + B\sigma_{yy}^c + C \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}^c}{\partial y^2} = D\sigma_{xx}^c + E\sigma_{yy}^c + F \end{cases} \quad (\text{A2.9})$$

avec :

$$\begin{cases} A = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_c E_x} + \frac{1}{e_s E_s} \right) \\ B = -\frac{G_a}{e_a} \left(\frac{\nu_{xy}}{e_c E_x} + \frac{\nu_s}{e_s E_s} \right) \\ C = \frac{G_a}{e_a e_c} (\alpha_x - \alpha_s) \Delta T \\ D = -\frac{G_a}{e_a} \left(\frac{\nu_{yx}}{e_c E_y} + \frac{\nu_s}{e_s E_s} \right) \\ E = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_c E_y} + \frac{1}{e_s E_s} \right) \\ F = \frac{G_a}{e_a e_c} (\alpha_y - \alpha_s) \Delta T \end{cases} \quad (\text{A2.10})$$

Tous les détails concernant cette résolution sont extraits de [MGB06]. En dérivant deux fois l'équation (A2.9) par rapport à y et en remplaçant la seconde équation du système pour éliminer le terme $\frac{\partial^2 \sigma_{yy}^c}{\partial y^2}$, l'équation différentielle suivante est obtenue :

$$\frac{\partial^4 \sigma_{xx}^c}{\partial x^2 \partial y^2} - A \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c}{\partial y^2} - E \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c}{\partial x^2} + (EA - BD)\sigma_{xx}^c + CE - FB = 0 \quad (\text{A2.11})$$

qui peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial^4 \sigma_{xx}^c}{\partial x^2 \partial y^2} - A \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c}{\partial y^2} - E \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^c}{\partial x^2} + G\sigma_{xx}^c + H = 0 \quad (\text{A2.12})$$

avec $G = E \times A - B \times D$ et $H = C \times E - F \times B$. Avant de résoudre cette équation dans le cas général, les conditions aux limites doivent être connues le long des frontières Γ . Celles-ci sont déjà connues partiellement étant donné que $\sigma_{xx}^s = \sigma_{xx}^c = 0$ le long de Γ_1 et Γ_3 . Il reste donc ici à déterminer σ_{xx}^c le long des frontières Γ_2 et Γ_4 . C'est l'objet du paragraphe suivant.

A.2.2 Recherche de σ_{xx}^c le long des frontières Γ_2 et Γ_4

Seule σ_{yy}^c est connue le long des frontières Γ_2 et Γ_4 où elle est nulle. L'objectif est ici de déterminer la condition limite pour σ_{xx}^c le long de Γ_2 et Γ_4 . La solution $\sigma_{yy}^c = 0$ est donc injectée dans la première équation du système (A2.9), ce qui donne l'équation suivante, où la fonction $\sigma_{xx}^\Gamma(x) = \sigma_{xx}^c(x, 0) = \sigma_{xx}^c(x, l_y)$ correspond à la distribution recherchée de σ_{xx}^c le long de Γ_2 et Γ_4 :

$$\frac{d^2 \sigma_{xx}^\Gamma}{dx^2} - A \sigma_{xx}^\Gamma = C \quad (\text{A2.13})$$

Les conditions aux limites pour cette fonction σ_{xx}^Γ sont facilement obtenues :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^\Gamma(0) = 0 \\ \sigma_{xx}^\Gamma(l_x) = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.14})$$

La solution de l'équation (A2.13) peut s'écrire sous forme d'une combinaison de fonctions *cosh* et *sinh* :

$$\sigma_{xx}^\Gamma(x) = C_1 \cosh(\sqrt{A}x) + C_2 \sinh(\sqrt{A}x) - \frac{C}{A} \quad (\text{A2.15})$$

où les constantes C_1 et C_2 sont déterminées à partir des conditions aux limites données par l'équation (A2.14), ce qui donne :

$$\sigma_{xx}^\Gamma(x) = \frac{C}{A} \left[\cosh(\sqrt{A}x) + \left(\frac{1 - \cosh(\sqrt{A}l_x)}{\sinh(\sqrt{A}l_x)} \right) \sinh(\sqrt{A}x) \right] \quad (\text{A2.16})$$

A.2.3 Solution pour σ_{xx}^c sous forme de séries

A ce niveau de la résolution de l'équation différentielle (A2.12), les conditions aux limites sont connues le long de toutes les frontières Γ . La solution de l'équation différentielle (A2.12) est proposée sous la forme suivante :

$$\sigma_{xx}^c(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi(\Phi_m + y)}{(2\Phi_m + l_y)}\right) \quad (\text{A2.17})$$

où Φ_m est un décalage suivant la direction y . Il sera déterminé dans le paragraphe suivant.

La propriété d'orthogonalité de la fonction *sinus* sera utilisée par la suite. Elle s'écrit comme suit :

$$\int_0^T \sin(m\omega x) \sin(n\omega x) dx = \frac{T}{2} \delta_{mn} \quad (\text{A2.18})$$

où $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et δ_{mn} est le symbole de Kronecker. L'équation (A2.17) est introduite dans l'équation (A2.12) et la propriété d'orthogonalité de l'équation (A2.18) est appliquée en intégrant suivant les directions x et y , x étant compris entre 0 et l_x et y étant compris entre $-\Phi_m$ et $\Phi_m + l_y$. Ceci mène à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_x} \int_{-\Phi_m}^{\Phi_m+l_y} F_{mn} I_{mn} \sin^2 \left(\frac{m\pi x}{l_x} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi(\Phi_m + y)}{(2\Phi_m + l_y)} \right) dx dy \\ &= -H \int_0^{l_x} \int_{-\Phi_m}^{\Phi_m+l_y} \sin \left(\frac{m\pi x}{l_x} \right) \sin \left(\frac{n\pi(\Phi_m + y)}{(2\Phi_m + l_y)} \right) dx dy \end{aligned} \quad (\text{A2.19})$$

où :

$$I_{mn} = \left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{2\Phi_m + l_y} \right)^2 + A \left(\frac{n\pi}{2\Phi_m + l_y} \right)^2 + E \left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + G \quad (\text{A2.20})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & F_{mn} I_{mn} \left(\frac{l_x}{4} \right) \left[y - \frac{(2\Phi_m + l_y)}{2n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi(\Phi_m + y)}{(2\Phi_m + l_y)} \right) \right]_{-\Phi_m}^{\Phi_m+l_y} = \\ & -H \frac{l_x}{m\pi} \left[\cos \left(\frac{m\pi x}{l_x} \right) \right]_0^{l_x} \left[\frac{(2\Phi_m + l_y)}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi(\Phi_m + y)}{(2\Phi_m + l_y)} \right) \right]_{-\Phi_m}^{\Phi_m+l_y} \end{aligned} \quad (\text{A2.21})$$

Finalement, il vient :

$$F_{mn} I_{mn} \left(\frac{l_x}{4} \right) [2\Phi_m + l_y] = -H \frac{l_x (2\Phi_m + l_y)}{mn\pi^2} [\cos(m\pi) - 1][\cos(n\pi) - 1] \quad (\text{A2.22})$$

F_{mn} peut être écrit comme suit :

$$F_{mn} = \frac{-4H \frac{(2\Phi_m + l_y)}{mn\pi^2} [\cos(m\pi) - 1][\cos(n\pi) - 1]}{I_{mn} [2\Phi_m + l_y]} \quad (\text{A2.23})$$

ce qui mène à :

$$\begin{cases} F_{mn} = \frac{-16H}{mn\pi^2 I_{mn}}, & m \text{ et } n \text{ impairs} \\ F_{mn} = 0, & m \text{ ou } n \text{ pair} \end{cases} \quad (\text{A2.24})$$

La distribution de σ_{xx}^p dans le patch s'écrit finalement comme suit :

$$\sigma_{xx}^c(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{-16H}{mn\pi^2 I_{mn}} \sin \left(\frac{m\pi x}{l_x} \right) \sin \left(\frac{n\pi(\Phi_m + y)}{(2\Phi_m + l_y)} \right) \quad (\text{A2.25})$$

Une expression similaire peut être obtenue pour σ_{yy}^c . Cette expression nécessite un décalage Φ_m qui est déterminé dans les paragraphes suivants. Pour cela, la solution générale ci-dessus est assimilée aux solutions données le long des frontières Γ_2 et Γ_4 (cf. équation (A2.16)). Ceci mène à une équation non-linéaire d'inconnue Φ_m . La résolution de cette équation est présentée au paragraphe A.2.5.

A.2.4 Solution le long des frontières

L'objectif est maintenant de déterminer Φ_m . Ce décalage peut être déterminé en utilisant les conditions aux limites le long de Γ_2 et Γ_4 définies par l'équation (A2.16). Une telle expression n'est cependant pas compatible avec l'expression de la solution donnée par l'équation (A2.25). L'idée est donc de développer la solution donnée par l'équation (A2.16) sous forme de séries de Fourier. Ainsi :

$$\sigma_{xx}^\Gamma(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (\text{A2.26})$$

où les termes Γ_m sont les paramètres à déterminer. Pour ceci, l'expression ci-dessus est introduite dans l'équation (A2.13), ce qui mène à :

$$-\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) - A \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) = C \quad (\text{A2.27})$$

Cette équation est ensuite multipliée par $\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)$ et intégrée entre 0 et l_x afin de déterminer Γ_m . Γ_m s'écrit finalement comme suit :

$$\Gamma_m = \frac{2C [(-1)^m - 1]}{m\pi \left[\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + A \right]} \quad (\text{A2.28})$$

ou encore :

$$\begin{cases} \Gamma_m = \frac{-4C}{m\pi \left[\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + A \right]} & \text{pour } m \text{ impair} \\ \Gamma_m = 0 & \text{pour } m \text{ pair} \end{cases} \quad (\text{A2.29})$$

La solution le long de Γ_2 et Γ_4 s'écrit finalement comme suit :

$$\sigma_{xx}^\Gamma(x) = \sigma_{xx}^c(x, 0) = \sigma_{xx}^c(x, l_y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{-4C}{m\pi \left[\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + A \right]} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \quad (\text{A2.30})$$

Il peut être facilement vérifié que la série ci-dessus converge rapidement vers la solution donnée par l'équation (A2.16) grâce au terme “ m^3 ” au dénominateur.

A.2.5 Détermination de Φ_m

A.2.5.1 Assimilation de la solution générale et de la distribution de contrainte le long de Γ_2 et Γ_4

Le but est maintenant de déterminer Φ_m en utilisant les conditions aux limites le long des frontières Γ_2 et Γ_4 définies par les équations (A2.30). Ceci est possible puisque les deux expressions sont développées sous forme de séries de Fourier. L'assimilation des conditions aux limites données par l'équation (A2.30) et la solution générale de l'équation (A2.25) avec $y = 0$ mène à :

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi\Phi_m}{2\Phi_m + l_y}\right) = \sum_{p=1,3,5,\dots}^{\infty} \Gamma_p \sin\left(\frac{p\pi x}{l_x}\right) \quad (\text{A2.31})$$

La propriété d'orthogonalité appliquée à cette dernière équation mène à :

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} F_{mn} \sin\left(\frac{n\pi\Phi_m}{2\Phi_m + l_y}\right) = \Gamma_m \quad (\text{A2.32})$$

L'utilisation de la définition de F_{mn} donnée par l'équation (A2.24) et la définition de Γ_m donnée par l'équation (A2.29), mène à :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4H(2\Phi_m + l_y)^2}{(n\pi)^3 \left[\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + A \right] + n\pi \left[E \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + G \right] (2\Phi_m + l_y)^2} \sin\left(\frac{n\pi\Phi_m}{2\Phi_m + l_y}\right) \\ = \frac{C}{\left[\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + A \right]} \end{aligned} \quad (\text{A2.33})$$

Pour des raisons de simplicité, les paramètres a , b et c sont introduits. L'équation (A2.33) peut être réécrite comme une fonction de trois variables a , b et c :

$$S1(a, b, c) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{a}{n^3 + bn} \sin(n\pi c) = \frac{C}{\left[\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + A \right]} \quad (\text{A2.34})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 4H \frac{(2\Phi_m + l_y)^2}{\left[\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + A \right] \pi^3} \\ b = \frac{E \left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + G}{\left[\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + A \right] \pi^2} (2\Phi_m + l_y)^2 \\ c = \frac{\Phi_m}{2\Phi_m + l_y} \end{array} \right. \quad (\text{A2.35})$$

A.2.5.2 Calcul des séries

Seuls les coefficients impairs sont impliqués dans les séries ci-dessus. Les séries suivantes sont maintenant introduites afin de calculer la série $S1(a, b, c)$ de l'équation (A2.34) :

$$\left\{ \begin{array}{l} S(a, b, c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^3 + bn} \sin(n\pi c) = S1(a, b, c) + S2(a, b, c) \\ S1(a, b, c) = \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{a}{n^3 + bn} \sin(n\pi c) \text{ (à déterminer)} \\ S2(a, b, c) = \sum_{n=2,4,6..}^{\infty} \frac{a}{n^3 + bn} \sin(n\pi c) \end{array} \right. \quad (\text{A2.36})$$

Une relation existe entre $S(a, b, c)$ et $S2(a, b, c)$. Il peut être facilement vérifié que :

$$S2(a, b, c) = \frac{1}{8} S\left(a, \frac{b}{4}, 2c\right) \quad (\text{A2.37})$$

Cette expression permet de réécrire $S1(a, b, c)$ à partir de l'équation (A2.36) :

$$S1(a, b, c) = S(a, b, c) - \frac{1}{8} S\left(a, \frac{b}{4}, 2c\right) \quad (\text{A2.38})$$

Par conséquent, la détermination de $S(a, b, c)$ mène directement à $S1(a, b, c)$. Deux sommes différentes peuvent être distinguées dans l'expression précédente de $S(a, b, c)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^3 + bn} \sin(n\pi c) = \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi c) - \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + b} \sin(n\pi c) \quad (\text{A2.39})$$

permettant ainsi de réécrire $S(a, b, c)$ de la manière suivante :

$$S(a, b, c) = \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi c) - \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + b} \sin(n\pi c) \quad (\text{A2.40})$$

$S(a, b, c)$ est donc la somme des deux séries ci-dessus, calculées dans le paragraphe suivant.

A.2.5.3 Calcul de $S(a, b, c)$

La première somme est égale à :

$$\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi c) \quad (\text{A2.41})$$

Il peut être montré que la série ci-dessus converge vers la fonction suivante :

$$\frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi c) = \frac{a\pi}{2b} (1 - c) \quad (\text{A2.42})$$

La deuxième somme est égale à :

$$- \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + b} \sin(n\pi c) \quad (\text{A2.43})$$

Il peut être montré que la série ci-dessus converge vers la fonction suivante :

$$- \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + b} \sin(n\pi c) = - \frac{a}{b} \frac{\pi}{2 \sinh(\pi\sqrt{b})} \sinh\left(\pi\sqrt{b}(1 - c)\right) \quad (\text{A2.44})$$

Les deux résultats précédents mènent directement à $S(a, b, c)$ en appliquant l'équation (A2.40) :

$$S(a, b, c) = \frac{a\pi}{2b} (1 - c) - \frac{a}{b} \frac{\pi}{2 \sinh(\pi\sqrt{b})} \sinh\left(\pi\sqrt{b}(1 - c)\right) \quad (\text{A2.45})$$

A.2.5.4 Calcul de $S1(a, b, c)$

Comme $S(a, b, c)$ est directement lié à $S1(a, b, c)$ (cf. équation (A2.38)), cette dernière série peut être calculée :

$$S1(a, b, c) = \frac{4H}{E \left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + G} \left[\frac{1}{4} - \frac{\sinh \left(\sqrt{d}(\Phi_m + l_y) \right)}{2 \sinh \left(\sqrt{d}(2\Phi_m + l_y) \right)} + \frac{\sinh \left(\frac{\sqrt{d}l_y}{2} \right)}{4 \sinh \left(\frac{(2\Phi_m + l_y)\sqrt{d}}{2} \right)} \right] \quad (\text{A2.46})$$

avec :

$$d = \frac{E \left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + G}{\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + A} \quad (\text{A2.47})$$

A.2.5.5 Conclusion : calcul de Φ_m

L'introduction de l'expression précédente dans l'équation (A2.34) mène à une équation d'inconnue Φ_m :

$$\frac{4H}{E \left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + G} \left[\frac{1}{4} - \frac{\sinh \left(\sqrt{d}(\Phi_m + l_y) \right)}{2 \sinh \left(\sqrt{d}(2\Phi_m + l_y) \right)} + \frac{\sinh \left(\frac{\sqrt{d}l_y}{2} \right)}{4 \sinh \left(\frac{(2\Phi_m + l_y)\sqrt{d}}{2} \right)} \right] = \frac{C}{\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + A} \quad (\text{A2.48})$$

Cette équation est non-linéaire. Elle peut cependant être simplifiée si l'ordre de grandeur des constantes est pris en compte. Pour des valeurs standards des épaisseurs du patch et de la colle e_c et e_a , de l'ordre de 1.10^{-3} m, l'ordre de grandeur de d est d'environ 1.10^6 m². Il est alors possible d'écrire :

$$\sinh \left(\sqrt{d}(\Phi_m + l_y) \right) \simeq e^{\sqrt{d}(\Phi_m + l_y)} \quad (\text{A2.49})$$

et l'équation (A2.48) devient :

$$\frac{4H}{E \left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + G} \left[\frac{1}{4} - \frac{e^{\sqrt{d}(\Phi_m + l_y)}}{2e^{\sqrt{d}(2\Phi_m + l_y)}} + \frac{e^{\frac{\sqrt{d}l_y}{2}}}{4e^{\frac{(2\Phi_m + l_y)\sqrt{d}}{2}}} \right] = \frac{C}{\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + A} \quad (\text{A2.50})$$

qui peut être réécrite comme suit :

$$\frac{H}{E \left(\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + G \right)} \left[1 - e^{-\sqrt{d}\Phi_m} \right] = \frac{C}{\left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + A} \quad (\text{A2.51})$$

Cette équation donne l'expression suivante pour Φ_m :

$$\Phi_m = -\frac{1}{\sqrt{d}} \ln \left(1 - \frac{Cd}{H} \right) \quad (\text{A2.52})$$

Il faut souligner que Φ_m est défini seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{Cd}{H} < 1 \quad (\text{A2.53})$$

afin d'éviter un terme négatif dans la fonction \ln . En pratique, si $\frac{Cd}{H} \geq 1$, une solution peut être trouvée en superposant deux solutions pour lesquelles l'inégalité (A2.53) est vérifiée.



Des patches en matériaux composites sont classiquement utilisés dans l'aéronautique pour réparer ou renforcer des structures métalliques. Ces deux types de matériaux présentent cependant des coefficients de dilatation très différents. De ce fait, leur assemblage, soumis à de grandes variations de température en cours de fonctionnement, est le siège de contraintes pouvant provoquer la rupture ou le décollement du patch.

Afin d'évaluer précisément les distributions de contraintes dans l'assemblage collé, différents modèles de calcul ont été proposés : d'abord un modèle analytique bidimensionnel mettant en évidence des effets liés à la géométrie plane de la structure, puis un modèle thermo-viscoélastique intégrant le comportement non-linéaire de la colle en fonction du temps et de la température. Ces modèles ont ensuite été partiellement validés expérimentalement sur des éprouvettes patchées en utilisant des méthodes de mesure de champs.

Composite patches are often used to repair or to reinforce metallic aircraft structures. Those two materials however exhibit very different Coefficients of Thermal Expansions (CTE). Shear stress peaks may then appear in a bonded joint submitted to wide temperature variations during its service life. Those stress peaks may lead to the debonding or to the failure of the joint.

In order to precisely evaluate the stress distributions in the bonded joint, different models have been studied: first an analytical bidirectional model, underlying some effects related to the plane geometry of the bonded structure, then a thermo-viscoelastic model taking into account the non-linear behaviour of the adhesive with respect to time and temperature. These models have then been partially experimentally validated on patched specimens using full-field measurement methods.